Magíster en Matemáticas PUCV
Examen de Admisión 2024

Instrucciones:

- Este examen consiste de dos partes en un total de 2 páginas.
- Son 3 problemas por parte, y quien postula debe resolver 2 de 3 problemas en cada una.
- El tiempo disponible por parte es de hora y media, para un total de 3 horas.

Parte I: Análisis

$\boxed{1.}$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

(i) Calcula $f'(x)$.

(ii) Prueba que $f'(x)$ no es continua.

(iii) Prueba que $f(x)^2$ es continua.

$\boxed{2.}$ (i) Sea $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ de clase C^1 tal que $f(x) = f(x^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcula

$$\int_{-2}^{4} \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

(ii) Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ monotona y sobreyectiva. Prueba que f es continua.

$\boxed{3.}$ Sea

$$A = \{(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2 : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

Prueba que A es denso en $\mathbb{R}^2$.

Parte II: Álgebra

1. Dado un entero positivo n, sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial que consiste de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ con grado a lo más n. Considerar las funciones

$$D : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}, \quad D(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1,$$

$$I : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}, \quad I(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x.$$

   (i) Demuestre que D, I, son transformaciones lineales.

   (ii) Determine el kernel y la imagen de D, I.

   (iii) Determine la veracidad del siguiente par de igualdades:

$$D \circ I = \mathrm{id}, \quad I \circ D = \mathrm{id},$$

   donde id denota la función identidad. (Justifique sus respuestas).

2. En lo siguiente, A denota a un anillo conmutativo.

   (i) Proveer un ejemplo de ideales primos $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ en un anillo A, tales que

$$(0) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq A.$$

   Considerar una cadena de ideales de A:

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

   (ii) Demostrar que la unión $I = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ es un ideal de A.

   (iii) Si cada I_n en la cadena es un ideal propio ($I_n \subsetneq A$), demostrar que I es también un ideal propio ($I \subsetneq A$).

3. Sea $f(x) = x^6 + x^3 + 1$.

   (i) Encuentre un primo p tal que $f(x)$ sea reducible en $\mathbb{F}_p[x]$, donde $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   (ii) Demuestre que, como polinomio en $\mathbb{Q}[x]$, $f(x)$ es irreducible.

   (iii) Verifique que $f(x)$ divide a $x^9 - 1$.

   (iv) Encuentre el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.