Magíster en Matemáticas PUCV
Examen de Admisión 2023

Instrucciones:

- Este examen consiste de dos partes en un total de 2 páginas.
- Son 3 problemas por parte, y quien postula debe resolver 2 de 3 problemas en cada una.
- El tiempo disponible por parte es de hora y media, para un total de 3 horas.

Parte I: Análisis

1. Para $n \geq 1$ considere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \cos(nx)$. Pruebe que no existe subsucesión de $(f_n)_n$ convergiendo uniformemente en $\mathbb{R}$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde $C > 0$ y $\alpha > 1$. Pruebe que f es constante.
3. Sea $(r_n)_n$ una sucesión de todos los números racionales. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$f(x) = \sum_{\{n : r_n < x\}} \frac{1}{2^n}.$$
Pruebe que f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si y solamente si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Parte II: Álgebra

1. Dado un número primo p, $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ denota al cuerpo con p elementos. Sea $V = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, el cual es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{F}_p$.

   (i) ¿Cuántos pares de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ linealmente independientes existen en V?

   (ii) Determine la cardinalidad del grupo general lineal $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. (Justifique su respuesta).

   (iii) Determine la cardinalidad del grupo especial lineal $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. (Justifique su respuesta).

2. Considerar al anillo de enteros de Eisenstein

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{x = a + \omega b \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

   donde

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

   Dado $x = a + i\, b$, su conjugado es $\bar{x} = a - i\, b$, y se define la norma

$$\mathrm{N} : \mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \mathrm{N}(x) = x\bar{x}.$$

   Demostrar lo siguiente:

   (i) $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$.

   (ii) $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$.

   (iii) $\mathrm{N}(x) = 1 \iff x \in \mathbb{Z}[\omega]^{\times}$, i.e., x es una unidad en $\mathbb{Z}[\omega]$.

   (iv) Determinar el grupo de unidades $\mathbb{Z}[\omega]^{\times}$.

3. Considere el polinomio $f(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (i) Determine el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

   Para un número primo p, considere el polinomio $h(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_p[x]$.

   (ii) Encuentre dos números primos distintos p, para los cuales $h(x)$ es reducible en $\mathbb{F}_p[x]$.

   (iii) Encuentre dos números primos distintos p, para los cuales $h(x)$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$.

   (No olvide justificar sus respuestas).