TRM pucv
TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
2023

CAPÍTULO 2: CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS

Sesión 2

2 de junio 2023

Instituto de Matemáticas
IMA PUCV
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

PROBLEMA 1

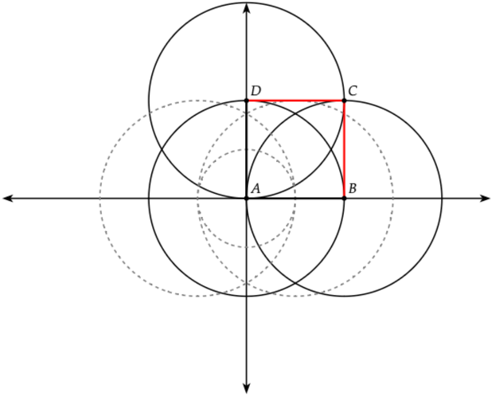
Problema 1.

Realiza la siguiente construcción:

- Utilizando la regla, construye dos rectas perpendiculares L_1 y L_2. Al punto de intersección, denominarlo A.
- Utilizando el compás, trazar una circunferencia con centro en A y radio arbitrario. Denotar por B y D la intersección entre la circunferencia y las rectas L_1 y L_2 respectivamente.
- Utilizando el compás, construir una circunferencia con centro en B y radio AB y otra con centro en D y radio AD. Denotar por C el punto de intersección de dichas circunferencias.
- Utilizando la regla, trazar el polígono $ABCD$.

Determine qué polígono se ha construido. Justifique la respuesta.

SOLUCIÓN



SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- En segundo lugar, sabemos que L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo en A es recto.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- En segundo lugar, sabemos que L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo en A es recto.
- En tercer lugar, si trazamos el segmento $\overline{BD}$, se tendrán dos triángulos congruentes por criterio LLL. Luego el ángulo en C también es recto.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- En segundo lugar, sabemos que L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo en A es recto.
- En tercer lugar, si trazamos el segmento $\overline{BD}$, se tendrán dos triángulos congruentes por criterio LLL. Luego el ángulo en C también es recto.
- En cuarto lugar, los dos triángulos formados son isosceles, por lo tanto $\angle ABD \equiv \angle ADB \equiv \angle CBD \equiv \angle CDB$, y cada uno mide 45 grados.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- En segundo lugar, sabemos que L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo en A es recto.
- En tercer lugar, si trazamos el segmento $\overline{BD}$, se tendrán dos triángulos congruentes por criterio LLL. Luego el ángulo en C también es recto.
- En cuarto lugar, los dos triángulos formados son isosceles, por lo tanto $\angle ABD \equiv \angle ADB \equiv \angle CBD \equiv \angle CDB$, y cada uno mide 45 grados.
- Por último, sabemos que $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$ y $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB$, y son ambos rectos.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, todos los lados del polígono son radios de la misma circunferencia o de circunferencias de igual radio. Es decir $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- En segundo lugar, sabemos que L_1 y L_2 son perpendiculares, por lo tanto, el ángulo en A es recto.
- En tercer lugar, si trazamos el segmento $\overline{BD}$, se tendrán dos triángulos congruentes por criterio LLL. Luego el ángulo en C también es recto.
- En cuarto lugar, los dos triángulos formados son isosceles, por lo tanto $\angle ABD \equiv \angle ADB \equiv \angle CBD \equiv \angle CDB$, y cada uno mide 45 grados.
- Por último, sabemos que $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$ y $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB$, y son ambos rectos.

En conclusión, el polígono tiene 4 lados congruentes y 4 ángulos internos congruentes. Es un cuadrado.

PROBLEMA 2

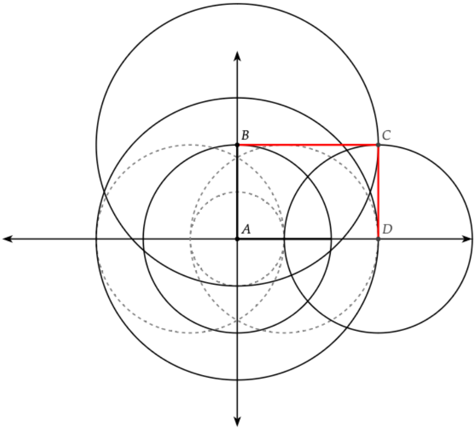
Problema 2.

Modifica los pasos de la construcción anterior para construir un rectángulo (que no sea cuadrado, es decir, que no tenga cuatro lados congruentes, sino que sólo dos pares opuestos de lados congruentes).

SOLUCIÓN 1

- Utilizando la regla, construye dos rectas perpendiculares L_1 y L_2. Al punto de intersección, denominarlo A.
- Utilizando el compás, trazar una circunferencia con centro en A y radio arbitrario. Denotar por B la intersección entre la circunferencia y la recta L_1.
- Utilizando el compás, trazar otra circunferencia con centro en A y radio arbitrario, distinto al de la circunferencia anterior. Denotar por D la intersección entre esta circunferencia y la recta L_2.
- Utilizando el compás, construir una circunferencia con centro en B y radio AD, y otra con centro en D y radio AB. Denotar por C uno de los puntos de intersección de dichas circunferencias.
- Utilizando la regla, trazar el polígono $ABCD$.

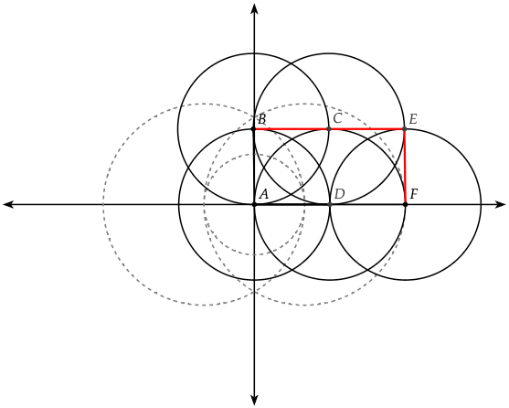
SOLUCIÓN 1



SOLUCIÓN 2

- Copiar la construcción de un cuadrado, pero sin trazar el polígono.
- Marcar el punto de intersección entre la circunferencia de centro D y radio AD como punto F.
- Utilizando el compás, crear una circunferencia con centro en C y radio CD, y otra con centro en F y radio DF. Marcar el punto de intersección como punto E.
- Utilizando la regla, trazar el polígono $ABEF$, que será un rectángulo.

SOLUCIÓN 2

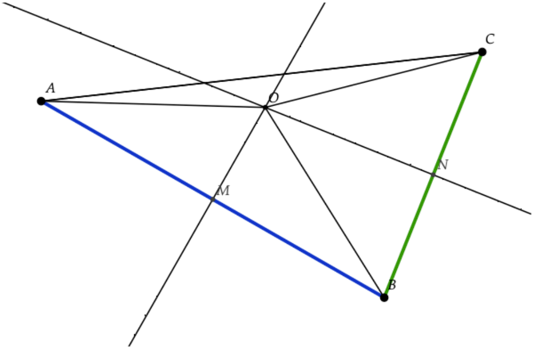


PROBLEMA 3

Problema 3.

Sea el polígono ABC un triángulo arbitrario. Construye la simetral de dos de sus lados siguiendo los pasos del problema de la primera sesión para construir puntos medios. Denomina como O al punto de intersección entre ambas simetrales. Demuestra que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$.

SOLUCIÓN



SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$.

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. Como $\overleftrightarrow{MO}$ es simetral de AB, entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\angle AMO \equiv \angle BMO$.

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. Como $\overleftrightarrow{MO}$ es simetral de AB, entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\angle AMO \equiv \angle BMO$. Además, MO es congruente consigo mismo, por lo que por criterio LAL se tiene lo deseado. Esto implica que $\overline{AO} = \overline{BO}$.

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. Como $\overleftrightarrow{MO}$ es simetral de AB, entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\angle AMO \equiv \angle BMO$. Además, MO es congruente consigo mismo, por lo que por criterio LAL se tiene lo deseado. Esto implica que $\overline{AO} = \overline{BO}$.
- El mismo argumento nos permite mostrar que $\triangle BNO \equiv \triangle CNO$. Luego $\overline{BO} = \overline{CO}$.

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. Como $\overleftrightarrow{MO}$ es simetral de AB, entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\angle AMO \equiv \angle BMO$. Además, MO es congruente consigo mismo, por lo que por criterio LAL se tiene lo deseado. Esto implica que $\overline{AO} = \overline{BO}$.
- El mismo argumento nos permite mostrar que $\triangle BNO \equiv \triangle CNO$. Luego $\overline{BO} = \overline{CO}$.
- En conclusión $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$.

SOLUCIÓN

- Para efectos explicativos, nombremos los puntos medios que se generan con las simetrales a cada lado por M (simetral de AB) y N (simetral de BCC).
- Primero demostraremos que $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. Como $\overleftrightarrow{MO}$ es simetral de AB, entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\angle AMO \equiv \angle BMO$. Además, MO es congruente consigo mismo, por lo que por criterio LAL se tiene lo deseado. Esto implica que $\overline{AO} = \overline{BO}$.
- El mismo argumento nos permite mostrar que $\triangle BNO \equiv \triangle CNO$. Luego $\overline{BO} = \overline{CO}$.
- En conclusión $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$.

Observación

Esto en particular demuestra que O es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.