TRM pucv 2023
TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

CAPÍTULO 1: RAZONAMIENTO LÓGICO

Sesión 4

12 de mayo 2023

Instituto de Matemáticas
IMA PUCV

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

EJERCICIO 1

Ejercicio 1

Cinco alumnos, Miguel, Carlos, Rocío, Patricio y Pamela, responden verdadero (V) o falso (F) en un examen de cuatro preguntas, de la siguiente manera:

Preguntas	Miguel	Carlos	Rocío	Patricio	Pamela
1	V	F	V	F	V
2	F	V	F	F	F
3	V	F	F	V	F
4	F	V	F	V	V

Si uno de ellos contestó todas las preguntas correctamente, otro falló en todas y un tercero falló en tres, ¿quién contestó todas las preguntas correctamente?

SOLUCIÓN

La primera condición establece que dos personas tienen respuestas contrarias el uno al otro. En este caso, la únicas dos columnas que satisfacen lo anterior son las respuestas de Miguel y Carlos. Por tanto uno de ellos dos acertó en todas y el otro falló, ¿pero quién?.

SOLUCIÓN

La primera condición establece que dos personas tienen respuestas contrarias el uno al otro. En este caso, la únicas dos columnas que satisfacen lo anterior son las respuestas de Miguel y Carlos. Por tanto uno de ellos dos acertó en todas y el otro falló, ¿pero quién?.

Para determinarlo hacemos uso de la segunda condición del problema : “un tercero falló en sólo tres preguntas”. Con esto, comparamos las respuestas de Rocío, Patricio y Pamela con las respuestas de Miguel o Carlos, pues buscamos o bien tres preguntas iguales y una distinta, o bien tres distintas y una igual.

SOLUCIÓN

La primera condición establece que dos personas tienen respuestas contrarias el uno al otro. En este caso, la únicas dos columnas que satisfacen lo anterior son las respuestas de Miguel y Carlos. Por tanto uno de ellos dos acertó en todas y el otro falló, ¿pero quién?.

Para determinarlo hacemos uso de la segunda condición del problema : "un tercero falló en sólo tres preguntas". Con esto, comparamos las respuestas de Rocío, Patricio y Pamela con las respuestas de Miguel o Carlos, pues buscamos o bien tres preguntas iguales y una distinta, o bien tres distintas y una igual. Después de una simple observación nos damos cuenta de que las únicas respuestas que cumplen con lo pedido son las de Rocío, quien posee las preguntas 1, 2 y 4 iguales a las de Miguel. Por tanto, podemos concluir que Miguel tuvo todas las respuestas incorrectas y Carlos todas las respuestas correctas.

EJERCICIO 2

Ejercicio 2

Los alumnos de cierto colegio tienen la siguiente propiedad:

- Cada par de alumnos que tenga el mismo número de amigos en el colegio, no tienen amigos del colegio en común.
- No existen alumnos sin amigos.

Demuestre que existe un alumno del colegio que tiene exactamente sólo un amigo dentro del colegio.

SOLUCIÓN

Hint

¿Qué ocurre con el número de amigos de el/la (los/las) más populares del colegio?

SOLUCIÓN

Hint

¿Qué ocurre con el número de amigos de el/la (los/las) más populares del colegio?

Sea A el/la alumno/a con mayor número de amigos, digamos n. Como los n amigos de A tienen al menos un amigo en común (a saber A), se sigue que el número de amigos de cada uno de ellos es distinto entre sí.

SOLUCIÓN

Hint

¿Qué ocurre con el número de amigos de el/la (los/las) más populares del colegio?

Sea A el/la alumno/a con mayor número de amigos, digamos n. Como los n amigos de A tienen al menos un amigo en común (a saber A), se sigue que el número de amigos de cada uno de ellos es distinto entre sí. Además, el número de amigos de cada uno de ellos, es mayor que cero y menor o igual que n, luego, necesariamente, cada una de estas n personas, tiene 1, ó 2, ó 3, ó 4, ..., ó $(n-1)$, ó n amigos exactamente.

SOLUCIÓN

Hint

¿Qué ocurre con el número de amigos de el/la (los/las) más populares del colegio?

Sea A el/la alumno/a con mayor número de amigos, digamos n. Como los n amigos de A tienen al menos un amigo en común (a saber A), se sigue que el número de amigos de cada uno de ellos es distinto entre sí. Además, el número de amigos de cada uno de ellos, es mayor que cero y menor o igual que n, luego, necesariamente, cada una de estas n personas, tiene 1, ó 2, ó 3, ó 4, ..., ó $(n-1)$, ó n amigos exactamente. En particular, existe una persona que tiene exactamente un amigo en el colegio.

EJERCICIO 3

Ejercicio 3

Cada participante de un torneo juega con cada uno de los otros participantes exactamente una sola vez. Ningún juego es un empate. Después del torneo, cada jugador hace una lista con los nombres de todos los jugadores que:

- fueron derrotados por él, y
- los que fueron derrotados por alguien que fue derrotado por él.

Con estas condiciones, concluya que necesariamente debe haber un jugador cuya lista posee los nombres de todos los otros jugadores.

SOLUCIÓN

Hint

- Analice la lista más larga de entre todos los jugadores
- ¿qué sucede si existe algún jugador que no está en la lista anterior?

SOLUCIÓN

Hint

- Analice la lista más larga de entre todos los jugadores
- ¿qué sucede si existe algún jugador que no está en la lista anterior?

Sea A, el jugador con mayor número de victorias, y supongamos que la lista de éste no posee a todos los nombres de los demás jugadores, es decir, existe al menos un jugador, digamos B, que no cumple las condiciones para estar en la lista de A.

SOLUCIÓN

Esto significa que:

- B le ganó a A, de no ser así estaría en la lista de A, y
- B le ganó a todos los jugadores que derrotó A. En efecto, B jugó con todos los jugadores por hipótesis, en particular con los derrotados por A. Si hubiera perdido con uno de ellos estaría en la lista de A.

SOLUCIÓN

Esto significa que:

- B le ganó a A, de no ser así estaría en la lista de A, y
- B le ganó a todos los jugadores que derrotó A. En efecto, B jugó con todos los jugadores por hipótesis, en particular con los derrotados por A. Si hubiera perdido con uno de ellos estaría en la lista de A.

Por lo tanto, tendríamos que B habría derrotado a más jugadores que A (al menos uno más para ser precisos), lo cual contradice la suposición de que A era el jugador con más victorias. Así, necesariamente el jugador con más victorias debe poseer todos los nombres de los demás jugadores en su lista.

EJERCICIO 4

Ejercicio 4

Tres escuelas de Valparaíso tienen n estudiantes cada una. Cualquier estudiante de alguna de las tres escuelas tiene exactamente $n+1$ conocidos de las otras dos escuelas. ¿Es posible escoger un alumno de cada escuela de modo que los tres se conozcan mutuamente?

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

Supongamos que este estudiante proviene de la primera escuela y que sus k conocidos son de la segunda escuela. Luego A conoce $(n+1-k)$ estudiantes de la tercera escuela.

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

Supongamos que este estudiante proviene de la primera escuela y que sus k conocidos son de la segunda escuela. Luego A conoce $(n+1-k)$ estudiantes de la tercera escuela.

Claramente $n+1-k \geq 1$, pues A, no puede tener a los $n+1$ conocidos en una sola escuela. Por tanto, A conoce al menos a una persona en el tercer colegio, digamos B.

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

Supongamos que este estudiante proviene de la primera escuela y que sus k conocidos son de la segunda escuela. Luego A conoce $(n+1-k)$ estudiantes de la tercera escuela.

Claramente $n+1-k \geq 1$, pues A, no puede tener a los $n+1$ conocidos en una sola escuela. Por tanto, A conoce al menos a una persona en el tercer colegio, digamos B.

Notar que si B conoce a alguno de los k conocidos que tiene A en la segunda escuela, digamos C, entonces los alumnos $\{A, B, C\}$ se conocen entre sí.

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

Supongamos que este estudiante proviene de la primera escuela y que sus k conocidos son de la segunda escuela. Luego A conoce $(n+1-k)$ estudiantes de la tercera escuela.

Claramente $n+1-k \geq 1$, pues A, no puede tener a los $n+1$ conocidos en una sola escuela. Por tanto, A conoce al menos a una persona en el tercer colegio, digamos B.

Notar que si B conoce a alguno de los k conocidos que tiene A en la segunda escuela, digamos C, entonces los alumnos $\{A, B, C\}$ se conocen entre sí.

Por otro lado, si B no conociera a ninguno de los k conocidos de A en la segunda escuela, se tendría que en esta escuela, B conoce a lo más a $(n-k)$ estudiantes. Luego B conoce al menos a $n+1-(n-k)$ estudiantes en la primera escuela, es decir $k+1$ estudiantes.

SOLUCIÓN

Consideremos el alumno A, de entre los tres colegios (del total $3n$), que tiene el mayor número de conocidos en una de las otras dos escuelas, digamos k conocidos.

Supongamos que este estudiante proviene de la primera escuela y que sus k conocidos son de la segunda escuela. Luego A conoce $(n+1-k)$ estudiantes de la tercera escuela.

Claramente $n+1-k \geq 1$, pues A, no puede tener a los $n+1$ conocidos en una sola escuela. Por tanto, A conoce al menos a una persona en el tercer colegio, digamos B.

Notar que si B conoce a alguno de los k conocidos que tiene A en la segunda escuela, digamos C, entonces los alumnos $\{A, B, C\}$ se conocen entre sí.

Por otro lado, si B no conociera a ninguno de los k conocidos de A en la segunda escuela, se tendría que en esta escuela, B conoce a lo más a $(n-k)$ estudiantes. Luego B conoce al menos a $n+1-(n-k)$ estudiantes en la primera escuela, es decir $k+1$ estudiantes.

Pero esto contradice el hecho de que A era quien más conocidos tenía en alguna de las escuelas.