TRM pucv 2023
TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

# CAPÍTULO 1: RAZONAMIENTO LÓGICO

## Sesión 2

28 de abril 2023

Instituto de Matemáticas
IMA PUCV
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

# DESAFÍO SEMANA ANTERIOR

## Desafío

Se dispone de 12 bolas de aspecto idéntico y una balanza con dos bandejas para pesarlas. Se sabe que todas pesan lo mismo, salvo una, que es o bien más pesada, o bien más ligera. ¿Cómo puedes identificar la bola diferente con sólo tres usos de la balanza?

Puede ser de utilidad intentar reducir el problema al problema 1 de la sesión anterior.

Puede ser de utilidad intentar reducir el problema al problema 1 de la sesión anterior.
Pesamos 8 bolas arbitrarias, cuatro en cada bandeja.

Puede ser de utilidad intentar reducir el problema al problema 1 de la sesión anterior. Pesamos 8 bolas arbitrarias, cuatro en cada bandeja. Si la balanza queda en equilibrio, entonces la bola distinta se encuentra entre las 4 restantes. Si no queda en equilibrio, entonces la bola distinta se encuentra entre las 8 pesadas.

# CASO I. EQUILIBRIO

# CASO I. EQUILIBRIO

De las 4 bolas restantes, pesamos en el segundo intento a 3 de estas con 3 de las que ya fueron pesadas. Esto nuevamente divide casos:

Caso I.1. La balanza queda nuevamente en equilibrio, entonces la bola distinta es la que resta. Esta se compara con cualquiera de las otras 11 para verificar si pesa menos (bandeja que la contiene sube) o si pesa más (bandeja que la contiene baja).

Caso I.2. La balanza no queda en equilibrio, entonces la bola distinta se encuentra entre las 3 seleccionadas entre las restantes de la primera pesada.

# CASO I. EQUILIBRIO

De las 4 bolas restantes, pesamos en el segundo intento a 3 de estas con 3 de las que ya fueron pesadas. Esto nuevamente divide casos:

Caso I.1. La balanza queda nuevamente en equilibrio, entonces la bola distinta es la que resta. Esta se compara con cualquiera de las otras 11 para verificar si pesa menos (bandeja que la contiene sube) o si pesa más (bandeja que la contiene baja).

Caso I.2. La balanza no queda en equilibrio, entonces la bola distinta se encuentra entre las 3 seleccionadas entre las restantes de la primera pesada. Si la bandeja subió es porque la bola distinta es más liviana, y si bajó es porque la bola distinta es más pesada. Luego se pesan 2 de estas tres bolas, una en cada balanza.

Caso I.2.1. Si la balanza queda en equilibrio, la bola distinta es la que sobró.

Caso I.2.2. Si la balanza no queda en equilibrio, la bola distinta es la que suba o baje según lo visto en el punto I.2.

# CASO II. SIN EQUILIBRIO

# CASO II. SIN EQUILIBRIO

Ya vimos que en este caso la bola distinta se encuentra entre las 8 pesadas. La dificultad está en que la bandeja que bajó, de contener a la bola distinta, determina que esta es más pesada, pero si no la contiene, entonces la bola distinta es más liviana.

# CASO II. SIN EQUILIBRIO

Ya vimos que en este caso la bola distinta se encuentra entre las 8 pesadas. La dificultad está en que la bandeja que bajó, de contener a la bola distinta, determina que esta es más pesada, pero si no la contiene, entonces la bola distinta es más liviana.

## Nombremos a las bolas

- Las bolas de la bandeja que bajó se nombrarán $b_1$, $b_2$, $b_3$ y $b_4$.
- Las bolas de la bandeja que subió se nombrarán $s_1$, $s_2$, $s_3$ y $s_4$.

# CASO II. SEGUNDA PESADA

Vamos a pesar 3 y 3, considerando como grupo 1 (G1) a $\{b_1, s_1, x\}$, y como grupo 2 (G2) a $\{b_2, b_3, s_2\}$, donde $x$ es cualquier bola de las 4 que no se pesaron.

# CASO II. SEGUNDA PESADA

Vamos a pesar 3 y 3, considerando como grupo 1 (G1) a $\{b_1, s_1, x\}$, y como grupo 2 (G2) a $\{b_2, b_3, s_2\}$, donde $x$ es cualquier bola de las 4 que no se pesaron. Aquí es clave notar que ya sabemos en este caso que $x$ pesa igual a otras 10 bolas, es un comodín para comparar.

# CASO II. SEGUNDA PESADA

Vamos a pesar 3 y 3, considerando como grupo 1 (G1) a $\{b_1, s_1, x\}$, y como grupo 2 (G2) a $\{b_2, b_3, s_2\}$, donde $x$ es cualquier bola de las 4 que no se pesaron. Aquí es clave notar que ya sabemos en este caso que $x$ pesa igual a otras 10 bolas, es un comodín para comparar.

Caso II.1. Si la balanza queda en equilibrio al pesar $G1$ y $G2$, la bola distinta es una de las 3 que no fueron consideradas, a saber $b_4$, $s_3$ y $s_4$. Luego basta pesar en el tercer intento $s_3$ y $s_4$ pues si la balanza nuevamente queda en equilibrio, la bola distinta es $b_4$, pero si no queda en equilibrio, debe ser la bola de la bandeja que quede más arriba (pues sabemos que entre estas la bola es más liviana).

# CASO II. SEGUNDA PESADA

Caso II.2. Si la balanza no queda en equilibrio al pesar $G1$ y $G2$, entonces nuevamente ocurren 2 casos posibles:

Caso II.2.1. La bandeja que contiene a $b_1$, $s_1$, $x$ queda más abajo que la que contiene a $b_2$, $b_3$ y $s_2$. Esto implica que la bola distinta es o bien $b_1$ o bien $s_2$ ($x$ no puede ser). Ahora, tomamos $b_1$ o $s_2$ y en el tercer intento la pesamos con $x$. Si la bandeja queda en equilibrio, entonces la bola que no fue pesada es la distinta. Si la bandeja no queda en equilibrio, entonces la bandeja que no contiene a $x$ bajará si contiene a $b_1$ y subirá si contiene a $s_2$.

# CASO II. SEGUNDA PESADA

Caso II.2. Si la balanza no queda en equilibrio al pesar $G1$ y $G2$, entonces nuevamente ocurren 2 casos posibles:

Caso II.2.1. La bandeja que contiene a $b_1$, $s_1$, $x$ queda más abajo que la que contiene a $b_2$, $b_3$ y $s_2$. Esto implica que la bola distinta es o bien $b_1$ o bien $s_2$ ($x$ no puede ser). Ahora, tomamos $b_1$ o $s_2$ y en el tercer intento la pesamos con $x$. Si la bandeja queda en equilibrio, entonces la bola que no fue pesada es la distinta. Si la bandeja no queda en equilibrio, entonces la bandeja que no contiene a $x$ bajará si contiene a $b_1$ y subirá si contiene a $s_2$.

Caso II.2.2. La bandeja que contiene a $b_1$, $s_1$ y $x$ queda más arriba que la que contiene a $b_2$, $b_3$ y $s_2$. Esto implica que la bola distinta está entre $s_1$, $b_2$ y $b_3$. En nuestro tercer intento comparamos $b_2$ con $b_3$. Si la balanza queda en equilibrio significa que $s_1$ es distinta (y más liviana). Si la balanza no queda en equilibrio la bola distinta es la que quede más abajo (pues sabemos que entre $b_2$ y $b_3$ la única posibilidad es que la bola sea más pesada).

# PROBLEMA 1

## Problema 1. La historia de los cuatro sospechosos

Se denunció un robo de dinero y la policía detuvo a cuatro sospechosos. Los cuatro fueron interrogados, y dijeron lo siguiente:

- El sospechoso número 1 dijo que él no robó el dinero.
- El sospechoso n'umero 2 dijo que el número uno mentía.
- El sospechoso número 3 dijo que el número dos mentía.
- El sospechoso número 4 dijo que el número dos fue quien robó el dinero.

Un informante le advirtió a la policía que sólo uno de ellos diría la verdad, mientras que los otros tres mentirían. ¿Quién dijo la verdad y quién robó el dinero?

**Solución**

Es fácil notar que la única opción que no lleva a contradicciones es que el sospechoso número dos diga la verdad. Por tanto el número uno es quién robó el dinero.

# PROBLEMA 2

## Problema 2.

Un antiguo rey estaba cansado de escuchar diferentes opiniones de sus tres sabios consejeros y decidió eliminar a dos de ellos a través de un acertijo. Solamente aquel que primero lo resolviese continuaría como consejero.

El rey colocó a los tres sabios en fila y les dijo: “Dispongo de cinco sombreros, tres blancos y dos negros. Os colocaré a cada uno de vosotros uno de estos sombreros en vuestra cabeza, de manera que seréis capaces de ver el sombrero que lleve quien esté delante pero no el vuestro (el último sabio de la fila ve a los otros dos, el segundo sabio ve al primero y el primer sabio no ve a ninguno de los otros dos). El test consiste en adivinar el color del sombrero que lleváis y explicar cómo lo habéis adivinado. Debéis saber que si uno de vosotros se equivoca, moriréis los tres!´´

El Rey colocó a cada uno de los tres sabios uno de los sombreros blancos y guardó los dos que le sobraron sin que los sabios los viesen.

Empezó preguntando al último de la fila que no respondió nada. Continuó preguntando al segundo que tampoco respondió. Y cuando le tocó al primero, éste respondió: -“Majestad, con toda certeza mi sombrero es blanco´´

¿Cómo lo supo?

## Solución

Como el primer sabio no responde, significa que vio al menos un sombrero blanco (en caso contrario hubiera deducido que el suyo era blanco). Luego, el segundo sabio debió ver un sombrero blanco, pues de haber visto uno negro, deduce inmediatamente que el suyo es blanco. Por último, con esta información, el primer sabio determina con certeza que su sombrero es blanco.

# PROBLEMA 3

## Problema 3. El puzzle de los isleños de ojos azules

Un grupo de personas con los ojos de diversos colores viven en una isla. Todos ellos son lógicos perfectos, si una conclusión se puede deducir lógicamente, ellos lo harán de inmediato. Nadie conoce el color de sus ojos. Cada noche, a media noche, un transbordador se detiene en la isla. Si alguien ha averiguado el color de sus propios ojos, deberán dejar la isla esa medianoche. Todo el mundo puede ver a los demás, en todo momento, y mantiene una cuenta de la cantidad de personas que ven con cada uno de los colores de ojos (excluyéndose a sí mismo), pero no pueden comunicarlo de ninguna manera. Todo el mundo en la isla conoce las normas descritas anteriormente.

En la isla hay 100 personas de ojos azules, 100 personas de ojos marrones, y el Gurú, que tiene los ojos verdes. Cualquier persona con los ojos azules puede ver 100 personas con los ojos marrones, 99 con los ojos azules, y uno con los ojos verdes, pero que no le dirán su propio color de ojos. En la medida de lo que sabe, el total podría ser 101 personas de ojos marrones y 99 de ojos azules. O 100 marrones, 99 azules, y él tener los ojos rojos.

Al Gurú se le permite hacer uso de la palabra una vez en cierto día, digamos a mediodía. Permaneciendo ante los isleños, dice lo siguiente: “Yo puedo ver a alguien que tiene los ojos azules´´.

¿Quién sale de la isla, y cuándo?