TRM pucv
TALLER DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
2023

CAPÍTULO 1: RAZONAMIENTO LÓGICO

Sesión 1

21 de abril 2023

Instituto de Matemáticas
IMA PUCV
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

La lógica es una ciencia formal, vale decir, que basa sus teorías en el estudio de proposiciones, definiciones, axiomas y ciertas reglas de inferencia. La lógica, en términos sencillos, se encarga de estudiar la validez de un argumento en cuanto a su estructura formal independiente del contenido del mismo. La lógica cobró gran importancia en matemáticas, puesto que esta última también se define como una ciencia formal, cuyos cimientos y constructos se han establecido a través de la lógica.

En 1931 el lógico austríaco Kurt Gödel, utilizó los principios de la lógica para comprender los fundamentos de la matemática, llegando a formular dos grandes teoremas conocidos como los "teoremas de incompletitud" de Gödel, hecho que marcó un hito en la historia. Uno de estos resultados postula que, si la matemática es un sistema consistente de axiomas y proposiciones (es decir que no es un sistema contradictorio en sí mismo), entonces existen enunciados para los cuales no es posible demostrar su veracidad o falsedad. Esto desconcertó a algunos matemáticos y filósofos de la época, puesto que actualmente existen proposiciones que llevan siglos sin poder ser demostradas o refutadas. Tal es el caso de la conjetura de Goldbach y la hipótesis de Riemann.

En este capítulo se proponen problemas que requieran una forma estructurada y lógica de pensar, sin mayores conocimientos sobre matemáticas. Con ello se pretende desarrollar el pensamiento lógico-deductivo, habilidad esencial para el estudio de esta ciencia.

Algunas de las técnicas a desarrollar en este capítulo serán la "demostración" o argumentación mediante la reducción al absurdo, la cual consiste en justificar un argumento suponiendo que su conclusión es falsa y luego de algunos pasos (argumentos válidos), se obtiene una conclusión que no es consistente con alguna de las hipótesis iniciales del argumento, es decir, se genera una contradicción o "absurdo".

Otra de las técnicas a trabajar será la “implicanción” o Modus Ponens como es conocida en la lógica clásica. Este principio establece que si una sentencia es consecuencia de una premisa, entonces si se supone válida la premisa, lo será también su consecuencia. Por ejemplo:

Si llueve todos se mojan
Llueve

Luego todos se mojan

Por último, también se trabajará fuertemente en la negación de algunas sentencias con cuantificadores. Por ejemplo, ¿Cuál es la negación correcta de “algunos números son primos menores que 1000”?

Por último, también se trabajará fuertemente en la negación de algunas sentencias con cuantificadores. Por ejemplo, ¿Cuál es la negación correcta de “algunos números son primos menores que 1000”?

Cabe mencionar que ambas técnicas se trabajarán de manera implícita en cada problema propuesto sin necesidad de dar una definición formal de cada una de ellas.

Por último, también se trabajará fuertemente en la negación de algunas sentencias con cuantificadores. Por ejemplo, ¿Cuál es la negación correcta de "algunos números son primos menores que 1000"?

Cabe mencionar que ambas técnicas se trabajarán de manera implícita en cada problema propuesto sin necesidad de dar una definición formal de cada una de ellas.

La paradoja del Barbero

En un pequeño pueblo existe un barbero que, por orden del alcalde, sólo debe afeitar a aquellos hombres que no sean capaces de afeitarse a si mismos. Cierto día, un cliente le hace la siguiente pregunta al barbero: Señor, pero si usted sigue estrictamente las órdenes del alcalde, ¿quién lo afeita a usted?, ¿Qué le respondió el barbero a aquél hombre?

EJERCICIO 1

Ejercicio 1

Se dispone de 8 bolas de aspecto idéntico y una balanza con dos bandejas para pesarlas. Se sabe que todas las bolas pesan lo mismo salvo una, que es más pesada. Al menos un alumno de esta sala sabe que para determinar cuál es la bola más pesada basta sólo con dos usos de la balanza. ¿Cómo lo ha hecho?

Solución

Primero se pesan 3 bolas en cada bandeja. Si la balanza queda en equilibrio, entonces la más pesada se encuentra entre las 2 restantes. Luego se pesan tales bolas y la bandeja que baje contiene a la más pesada.

Solución

Primero se pesan 3 bolas en cada bandeja. Si la balanza queda en equilibrio, entonces la más pesada se encuentra entre las 2 restantes. Luego se pesan tales bolas y la bandeja que baje contiene a la más pesada.

Si la balanza no queda en equilibrio, entonces la bola más pesada se encuentra entre las 3 bolas en la bandeja que quedó más abajo. Enseguida se pesan 2 de esas 3 bolas, una en cada bandeja. Si la balanza queda en equilibrio, entonces la bola más pesada es la que quedó fuera, en caso contrario, será la que está en la bandeja que quedó más abajo.

EJERCICIO 2

Ejercicio 2

Gustavo siempre miente tres días fijos de la semana y siempre dice la verdad los otros cuatro días. Todos los días de la semana pasada le hice la siguiente pregunta: ¿vas a decir mañana la verdad? Gustavo respondió NO todos los días excepto el domingo, día en que respondió SI. ¿Qué días de la semana dice la verdad Gustavo?

Día	¿Dirás mañana la verdad?	Miente (M)- Dice la verdad (V)
Lunes	NO	M
Martes	NO	V
Miércoles	NO	M
Jueves	NO	V
Viernes	NO	M
Sábado	NO	V
Domingo	SI	M
Lunes	¿?	M

Día	¿Dirás mañana la verdad?	Miente (M) - Dice la verdad (V)
Lunes	NO	V
Martes	NO	M
Miércoles	NO	V
Jueves	NO	M
Viernes	NO	V
Sábado	NO	M
Domingo	SI	V
Lunes	¿?	V

EJERCICIO 3

Ejercicio 2

En un planeta muy lejano el año tiene 2012 días. En cada día del año, cada habitante de dicho planeta miente o dice la verdad durante todo el día (ten presente que la cantidad de días en que se miente o en que se dice la verdad puede ser cero). A un habitante se le hizo, cada día del año, la siguiente pregunta: ¿Cuántos días mientes en el año?

Ejercicio 2

En un planeta muy lejano el año tiene 2012 días. En cada día del año, cada habitante de dicho planeta miente o dice la verdad durante todo el día (ten presente que la cantidad de días en que se miente o en que se dice la verdad puede ser cero). A un habitante se le hizo, cada día del año, la siguiente pregunta: ¿Cuántos días mientes en el año?

El habitante respondió: En el primer día: “Yo miento por lo menos un día en el año”. En el segundo día: “Yo miento por lo menos dos días del año´´. En el tercer día: “Yo miento por lo menos tres días del año´´. Y así sucesivamente todos los días del año. ¿Cuántos días en el año miente dicho habitante?

Hints

(1) Si la persona dice la verdad un día, ¿qué ocurre con los días anteriores?

Hints

(1) Si la persona dice la verdad un día, ¿qué ocurre con los días anteriores?

(2) Si la persona miente un día, ¿qué ocurre con los días posteriores?

Proposición

Si la persona dice la verdad el k-ésimo día del año, entonces dice la verdad los días $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Proposición

Si la persona dice la verdad el k-ésimo día del año, entonces dice la verdad los días $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Demostración

Si es verdad que miente al menos k días al año, entonces en particular miente al menos $k-1$, luego dice la verdad el día $k-1$. Luego, si es verdad que miente el día $k-1$, miente igualmente al menos $k-2$ días, lo que implica que día la verdad el día $k-2$. Este proceso continúa hasta el día 1.

Proposición

Si la persona miente el m-ésimo día del año, entonces miente los días $m+1, m+2, \ldots, 2012$.

Proposición

Si la persona miente el m-ésimo día del año, entonces miente los días $m+1, m+2, \ldots, 2012$.

Demostración

Esto es consecuencia de la proposición anterior.

Demostración

De las proposiciones, se deduce que debe haber un último día en que dice la verdad. Sea k ese día. Luego miente el día $k+1$. Así, dice la verdad exactamente k días y miente exactamente $2012 - k$ días. Pero además, como dice la verdad el día k, entonces miente por al menos k días, eso significa que $k \leq 2012 - k$. Por otra parte, como miente el día $k + 1$, entonces miente a lo más k días, luego $k \geq 2012 - k$. De este modo se concluye que $k = 2012 - k$. Esto implica que $k = 1006$.

EJERCICIO DESAFÍO

Desafío

Se dispone de 12 bolas de aspecto idéntico y una balanza con dos bandejas para pesarlas. Se sabe que todas pesan lo mismo, salvo una, que es o bien más pesada, o bien más ligera. ¿Cómo puedes identificar la bola diferente con sólo tres usos de la balanza?