COORDENADAS Y CÓNICAS

FELIPE RIQUELME

El objetivo de estas notas es entregar en detalle un procedimiento de estudio de secciones cónicas en el plano a partir de cambios de coordenadas. Para ello, en la primera sección abordaremos propiedades de las isometrías del plano, para luego modificar nuestro sistema de coordenadas. También usaremos la transformación de coordenada para estudiar el efecto de estas en un lugar geométrico, particularmente en su ecuación. La segunda sección considerará el estudio de ecuaciones cuadráticas en 2 variables y el cómo estas inducen lugares geométricos rotados. Usaremos en distintos casos el cambio de coordenadas para deducir la naturaleza del lugar geométrico en cuestión.

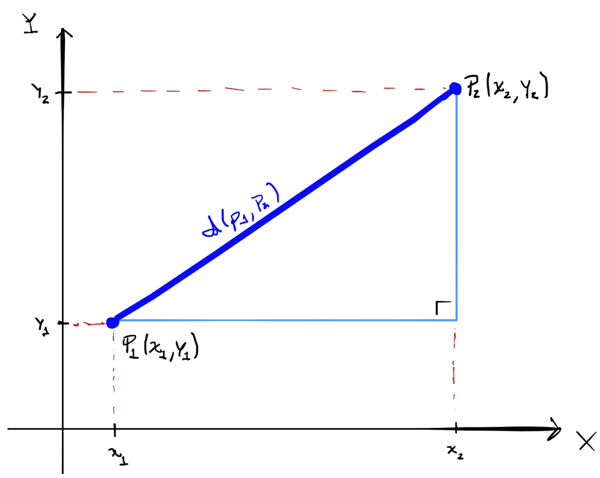
1. Transformación de coordenadas

En esta sección estudiaremos en particular 2 tipos de transformaciones del plano: la traslación y la rotación. Dejaremos de lado la reflexión pues, entre las 3 transformaciones, es la única que cambia la orientación de los objetos (piensen en el reflejo de ustedes en un espejo). Es importante destacar que estas 3 transformaciones entran en una categoría especial, todas preservan distancias. Aquellas transformaciones que preservan distancias se conocen como *isometrías* o *transformaciones isométricas*.

Recordemos que la distancia Euclideana en el plano está dada por

$$d(p_1, p_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

donde $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$.

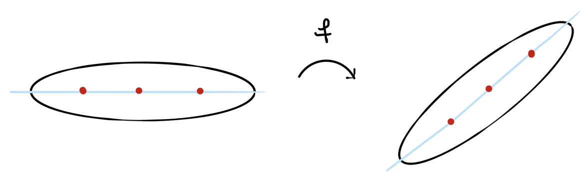


La definición formal de una isometría en el plano cartesiano es la siguiente.

Definición 1. Una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice *isometría* si para todo par de puntos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$d(f(p_1), f(p_2)) = d(p_1, p_2).$$

Como una isometría f preserva las distancias en el plano, la imagen por f de cualquier lugar geométrico mantiene su naturaleza. En efecto, si l es una recta, entonces $f(l)$ será una recta. Si $\mathscr{C}$ es una circunferencia, entonces $f(\mathscr{C})$ será una circunferencia. Lo mismo ocurre con una elipse, hipérbola y parábola. Por supuesto, en principio solo la naturaleza de los objetos se preserva por f, sus elementos pueden cambiar. Por ejemplo, si $c \in \mathbb{R}^2$ es el centro de $\mathscr{C}$, entonces el centro de $f(\mathscr{C})$ no es c, sino $f(c)$. Lo mismo con los focos (y otros elementos secundarios) de una parábola, elipse, o hipérbola. Estos no se preservan, pero sus imágenes por f serán los focos de la imagen del objeto.



Definición 2. Una traslación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de la forma

$$T(x, y) = (x + h, y + k),$$

donde $h, k \in \mathbb{R}$.

Proposición 3. *Una traslación es una isometría.*

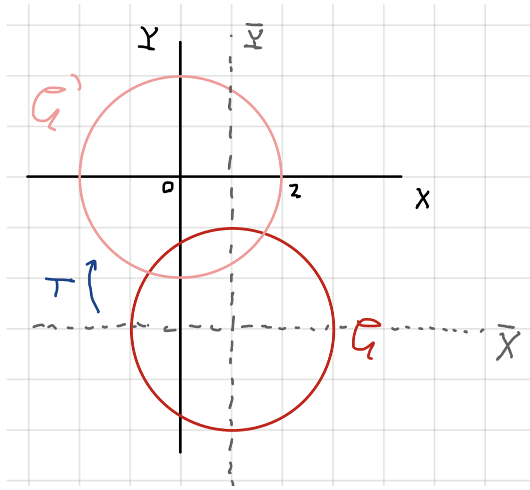
Proof. Fijemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una traslación de la forma $T(x, y) = (x + h, y + k)$. Sea $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, es decir $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$. Notemos que $T(p_1) = (x_1 + h, y_1 + k)$ y $T(p_2) = (x_2 + h, y_2 + k)$. Luego

$$\begin{aligned} d(T(p_1), T(p_2)) &= \sqrt{((x_1 + h) - (x_2 + h))^2 + ((y_1 + k) - (y_2 + k))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + h - x_2 - h)^2 + (y_1 + k - y_2 - k)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= d(p_1, p_2). \end{aligned}$$

Entonces T es una isometría. □

Consideremos la circunferencia de ecuación $\mathscr{C} : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Como sabemos, esta circunferencia tiene su centro en el punto $c = (1, -3)$ y tiene radio $r = 2$. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la traslación definida por $T(x, y) = (x - 1, y + 3)$, entonces $T(c) = (0, 0)$. Como vimos antes, la imagen $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ por T es una circunferencia de radio 2 y centro $T(c)$ pues las distancias se preservan. Así, la ecuación de $\mathscr{C}'$ es $x^2 + y^2 = 4$. La moral detrás de esto es que hemos transformado a la primera ecuación en una ecuación más simple, sin perder la naturaleza del objeto en cuestión.

Lo anterior también puede pensarse de una segunda manera, cambiando el sistema de coordenadas. Sea $\bar{x} = x - 1$ y $\bar{y} = y + 3$. Entonces en estas coordenadas la ecuación de la primera circunferencia es $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$. No es casualidad que nos dé la misma ecuación de $\mathscr{C}'$ pero en otras coordenadas, de hecho esto ocurre pues los ejes de coordenadas $\bar{X} = 0$ y $\bar{Y} = 0$ son enviados por T a $\bar{X} = -1$ y $\bar{Y} = 3$, es decir $X = 0$ y $Y = 0$. Trasladar el sistema de referencia para simplificar la ecuación de un objeto es equivalente a trasladar un lugar geométrico para obtener una ecuación simple de otro lugar geométrico.

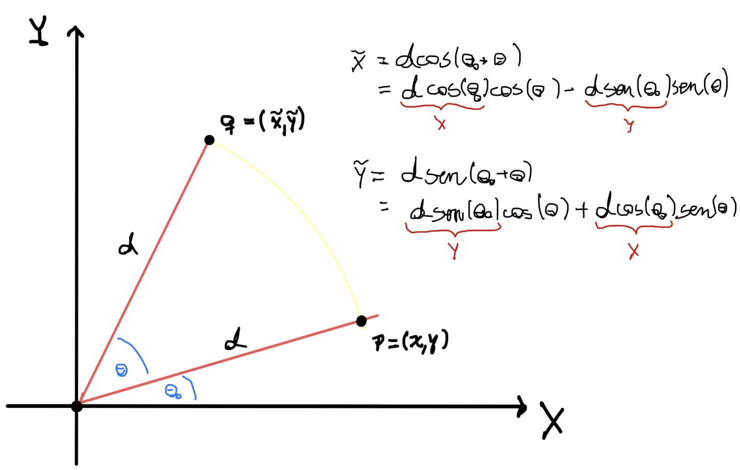


Usar traslaciones para centrar en el origen a una cónica nos permite simplificar una parte de su ecuación, sin embargo nos queda pendiente una dificultad hasta ahora no considerada. Las cónicas pueden estar rotadas. Definamos primero lo que es una rotación en el plano respecto al origen.

Definición 4. Una rotación $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ es una transformación de la forma

$$R_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

La definición anterior no es arbitraria. El dibujo siguiente nos grafica la elección de cada coordenada del término $R_\theta(x, y)$.



Proposición 5. *Una rotación es una isometría.*

Proof. Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ y $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación correspondiente. Sean $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. Entonces para $i = 1, 2$ se tiene

$$R_\theta(p_i) = (\underbrace{x_i \cos(\theta) - y_i \sin(\theta)}_{\tilde{x_i}}, \underbrace{x_i \sin(\theta) + y_i \cos(\theta)}_{\tilde{y_i}}).$$

Observemos entonces que

$$d^2(R_\theta(p_1), R_\theta(p_2)) = \sqrt{(\tilde{x_1} - \tilde{x_2})^2 + (\tilde{y_1} - \tilde{y_2})^2}$$

Desarrollamos por partes. Primero se tiene

$$\begin{aligned}
(\tilde{x_1} - \tilde{x_2})^2 &= (x_1 \cos(\theta) - y_1 \sin(\theta) - (x_2 \cos(\theta) - y_2 \sin(\theta)))^2 \\
&= ((x_1 - x_2)\cos(\theta) + (y_2 - y_1)\sin(\theta))^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) \\
&\quad + (y_2 - y_1)^2 \sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

Y en segundo lugar, se tiene

$$\begin{aligned}
(\tilde{y_1} - \tilde{y_2})^2 &= (x_1 \sin(\theta) + y_1 \cos(\theta) - (x_2 \sin(\theta) + y_2 \cos(\theta)))^2 \\
&= ((x_1 - x_2)\sin(\theta) + (y_1 - y_2)\cos(\theta))^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 \sin^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
&\quad + (y_1 - y_2)^2 \cos^2(\theta).
\end{aligned}$$

De esta forma, al usar la identidad $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ y simplificar términos, nos queda

$$d^2(R_\theta(p_1), R_\theta(p_2)) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d(p_1, p_2).$$

□

Ahora veremos un ejemplo de cómo rotar y trasladar cónicas, y el cómo estas transformaciones modifica su ecuaciones cartesianas. Si rotamos una circunferencia de centro en el origen, entonces la rotación deja al lugar geométrico intacto, por lo que su ecuación no cambia. Rotar respecto al origen se usa entonces exclusivamente en el caso de una parábola, una elipse y una hipérbola.

Ejemplo. Rotaremos una elipse en un ángulo $\theta = \pi/6$ y la trasladaremos de forma que el origen sea enviado al punto $(2, -1)$. De esta forma

$$\begin{aligned}
R_\theta(x, y) &= (x \cos(\pi/6) - y \sin(\pi/6), x \sin(\pi/6) + y \cos(\pi/6)) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} \right).
\end{aligned}$$

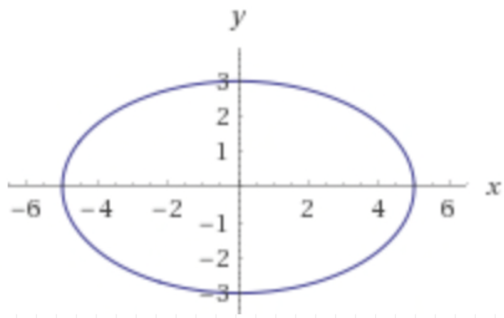
y

$$T(x, y) = (x + 2, y - 1).$$

Sea $\mathscr{E}$ la elipse de ecuación

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \tag{1}$$

Así, el eje mayor de la elipse está en el eje X y mide 10 unidades, y su eje menor está en el eje Y y mide 3 unidades. Sus focos son los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.



Sea $\tilde{x} = x\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2}$ y $\tilde{y} = \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces despejando x, y en términos de $\tilde{x}, \tilde{y}$, nos queda

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{y}, \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y}.$$

Reemplazando en la ecuación (1), nos queda

$$9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{y}\right)^2 + 25\left(-\frac{1}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y}\right)^2 = 225,$$

o de manera equivalente

$$52\tilde{x}^2 - 32\sqrt{3}\tilde{x}\tilde{y} + 84\tilde{y}^2 - 1100 = 0. \tag{2}$$

Ahora aplicamos la traslación. Sea $\bar{x} = \tilde{x} + 2$ y $\bar{y} = \tilde{y} - 1$. Despejando $\tilde{x}, \tilde{y}$ en función de $\bar{x}, \bar{y}$, obtenemos

$$\tilde{x} = \bar{x} - 2, \quad \text{y} \quad \tilde{y} = \bar{y} + 1.$$

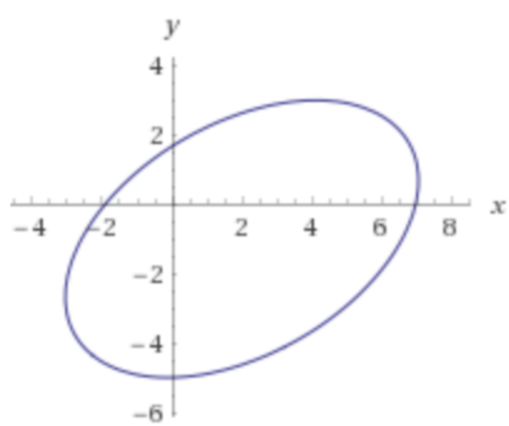
Si reemplazamos en la ecuación (2), se tiene

$$52(\bar{x} - 2)^2 - 32\sqrt{3}(\bar{x} - 2)(\bar{y} + 1) + 84(\bar{y} + 1)^2 - 1100 = 0,$$

o equivalentemente

$$52\bar{x}^2 - 32\sqrt{3}\bar{x}\bar{y} + 84\bar{y}^2 - (208 + 32\sqrt{3})\bar{x} + (168 + 64\sqrt{3})\bar{y} - 808 + 64\sqrt{3} = 0. \tag{3}$$

Si llamamos $f = T \circ R_\theta$, entonces los puntos $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenecientes a la elipse rotada y trasladada $f(\mathscr{E})$ satisfacen la ecuación (3).



Los elementoss de la elipse $f(\mathscr{E})$ son fáciles de determinar pues, a modo de ejemplo, el centro $(0,0)$ es enviado a $f(0,0) = (2,-1)$. Por otro lado, como $(-4,0)$ y $(4,0)$ son focos de $\mathscr{E}$, entonces $f((-4,0))$ y $f((4,0))$ serán focos de $f(\mathscr{E})$. En efecto,

$$R_\theta(-4,0) = (-2\sqrt{3},-2) \quad R_\theta(4,0) = (2\sqrt{3},2)$$

y

$$T(-2\sqrt{3},-2) = (2-2\sqrt{3},-3) \quad T(2\sqrt{3},2) = (2+2\sqrt{3},1).$$

Así, los puntos $(2-2\sqrt{3},-3)$ y $(2+2\sqrt{3},1)$ son los focos de $f(\mathscr{E})$.

Observaciones. En el ejemplo, al rotar nos apareció un término $\tilde{x}\tilde{y}$ en la ecuación. Cada vez que aparece tal término significa que el lugar geométrico está rotado (ni vertical ni horizontal). Cuando trasladamos, apareció un término de la forma $D\bar{x}+E\bar{y}$, donde D,E son constantes. En todos los casos, salvo en el de la parábola, esto significa que el lugar geométrico está trasladado respecto al origen (su centro no está en el origen). El caso de la parábola falla pues la parábola no tiene un centro.

2. Normalización de cónicas

En esta sección abordaremos el problema inverso de la primera sección, a saber, a partir de una ecuación cartesiana de orden 2 intentaremos determinar a qué lugar geométrico esta corresponde. Múltiples ejemplos serán dados al final de la sección.

Definición 6. Una ecuación cuadrática en el plano es una ecuación en 2 variables, de orden 2, de la forma

$$K(x,y) := Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4}$$

donde A,B,C,D,E y F son constantes reales.

Para simplificar el estudio, será conveniente denotar por $Q(x,y)$ a la parte cuadrática de la ecuación, es decir

$$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Similarmente, denotaremos por $L(x,y)$ a su parte lineal, es decir

$$L(x,y) = 2Dx + 2Ey.$$

La constante F será llamada término libre, y en general solo jugará un rol secundario en nuestro análisis. Quien juega un rol protagonista en este estudio es sin embargo el determinante de la parte cuadrática definido a continuación.

Definición 7. El determinante asociado a $Q(x,y)$ está definido por

$$\mathrm{Det}(Q) = AC - B^2. \tag{5}$$

Nuestro análisis se separará en 2 casos: determinante nulo y no nulo. Cada uno de estos casos tendrá sub-casos dependiendo de distintos factores, entre ellos los signos o valores posibles de las constantes involucradas en $K(x,y)$. Esto no significa que el análisis sea complicado, de hecho no se debe ni puede perder de vista nuestro objetivo de ver todas las posibles cónicas que podemos obtener a partir de una ecuación cuadrática concreta.

Determinante no nulo. El objetivo de esta sección será mostrar que, en caso que

$\text{Det}(Q) \neq 0$, entonces la ecuación representa una cónica con centro, es decir estaremos en uno de los posibles casos: una circunferencia, una elipse, una hipérbola, dos rectas que se cortan en un punto (su centro), o un solo punto.

Para determinar este centro, que es a priori abstracto, usaremos un cambio de variable para eliminar la parte lineal. En términos concretos, en caso de ser distinta de cero, la parte lineal nos dice que la cónica en cuestión está trasladada, por lo que el cambio de variable busca mover el eje de coordenadas a su centro, y que en estas nuevas coordenadas la cónica esté centrada en el origen.

Definimos $\bar{x} = x - h$ y $\bar{y} = y - k$, o de manera equivalente $x = \bar{x} + h$ y $y = \bar{y} + k$. Buscamos h y k de modo que la parte lineal de $Q(\bar{x} + h, \bar{y} + k)$ sea igual a cero. Para ello, notamos que

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= K(\bar{x}+h, \bar{y}+k) \\
&= A(\bar{x}+h)^2 + 2B(\bar{x}+h)(\bar{y}+k) + C(\bar{y}+k)^2 + 2D(\bar{x}+h) + 2E(\bar{y}+k) + F \\
&= A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + (2Ah + 2Bk + 2D)\bar{x} + (2Bh + 2Ck + 2E)\bar{y} \\
&\quad + (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F) \\
&= A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + (2Ah + 2Bk + 2D)\bar{x} + (2Bh + 2Ck + 2E)\bar{y} + K(h,k).
\end{aligned}$$

Si queremos anular la parte lineal de la ecuación cuadrática en 2 variables, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + Ck + E = 0 \end{aligned}\right\}$$

el cual tiene **única** solución justamente si $AC - B^2 \neq 0$. Así (h,k) es el centro del conjunto determinado por la ecuación general (4), el cual tiene forma en coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ dada por

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + F' = 0, \tag{6}$$

donde $F' = K(h,k)$.

El análisis ahora se divide en dos casos, los cuales se recomienda estudiar con cuidado, sin olvidar que las variables $\bar{x}, \bar{y}$ representan un nuevo sistema de coordenadas, las cuales están trasladadas respecto a las originales.

Caso 1 ($B = 0$). En este caso la ecuación (6) nos queda de la forma $A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 + F' = 0$. Aquí nuevamente podemos distinguir en dos sub-casos, si $F' = 0$ o bien si $F' \neq 0$. Recordando que $F' = K(h,k)$ concluímos que $F' = 0$ corresponde a cuando el centro de la cónica pertenece a la cónica. Esto solo se tiene si estamos hablando de dos rectas que se intersectan (en el centro) o si la cónica es solo un punto, que es lo que mostramos a continuación. En efecto, si $A, C > 0$ se tiene para $F' = 0$

$$A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{A}\bar{x} + \sqrt{C}\bar{y})(\sqrt{A}\bar{x} - \sqrt{C}\bar{y}) = 0$$

o bien para $A, C < 0$

$$A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{-A}\bar{x} + \sqrt{-C}\bar{y})(\sqrt{-A}\bar{x} - \sqrt{-C}\bar{y}) = 0.$$

Ambos casos corresponden a dos rectas que pasan por el origen en coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$. Por otro lado, para $F' = 0$ y $AC < 0$, se tiene que solo $(0,0)$ verifica $A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 = 0$.

El otro sub-caso corresponde a $F' \neq 0$. La ecuación se simplifica a la forma

$$\frac{\bar{x}^2}{(-F'/A)} + \frac{\bar{y}^2}{(-F'/C)} = 1,$$

los cual corresponde a una de tres posibles cónicas dependiendo de los signos de A y C. Si A y C tienen el mismo signo, significa que $\det(Q) > 0$ y estamos en el caso de una circunferencia, una elipse, o bien no hay solución. Si $AC < 0$ significa que $\det(Q) < 0$ y estamos en el caso de una hipérbola.

Resulta importante observar que en el primer caso las cónicas involucradas resultaron estar centradas en el origen, simétricas respecto a los ejes cartesianos $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$. Es decir, el caso que estudiaremos a continuación corresponde al caso donde no existen tales simetrías, o dicho de manera análoga, corresponde a una de las cónicas antes mencionadas estando rotadas.

Caso 2 ($B \neq 0$). En este caso nos interesa eliminar, vía un cambio de coordenadas, al término $\bar{x}\bar{y}$ en la ecuación (6). Para ello, determinaremos el ángulo de rotación de esta cónica respecto a las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$. Definimos entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tilde{x}\cos(\theta) - \tilde{y}\sin(\theta) \\ \bar{y} &= \tilde{x}\sin(\theta) + \tilde{y}\cos(\theta) \end{aligned}$$

Si reemplazamos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en (6), y hacemos bien las cuentas, nos queda

$$\begin{aligned} A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + F' \quad = \quad & \tilde{x}^2 \left(A\cos^2(\theta) + 2B\cos(\theta)\sin(\theta) + C\sin^2(\theta)\right) \\ & + \tilde{y}^2 \left(A\sin^2(\theta) - 2B\cos(\theta)\sin(\theta) + C\cos^2(\theta)\right) \\ & + \tilde{x}\tilde{y}\left(-A\sin(2\theta) + 2B\cos(2\theta) + C\sin(2\theta)\right) + F' \end{aligned}$$

Si queremos eliminar el término $\tilde{x}\tilde{y}$, debemos resolver entonces la ecuación

$$-A\sin(2\theta) + 2B\cos(2\theta) + C\sin(2\theta) = 0,$$

la cual es equivalente a

$$\tan(2\theta) = \frac{2B}{A - C},$$

en caso que $A \neq C$, o bien $\theta = \pi/4$ en el caso $A = C$. Sea cual sea el ángulo θ_0 que verifica la ecuación anterior, y definiendo

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2(\theta_0) + 2B\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + C\sin^2(\theta_0) \\ C' &= A\sin^2(\theta_0) - 2B\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + C\cos^2(\theta_0), \end{aligned}$$

la ecuación (6) en variables $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ resulta de la forma

$$A'\tilde{x}^2 + C'\tilde{y}^2 + F' = 0.$$

Ahora que la cónica en estas coordenadas se encuentra normalizada, podemos determinarla usando el análisis del caso 1. Es importante observar que la ecuación

$$\tan(2\theta) = \frac{2B}{A - C}$$

implica en particular que $2\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, es decir $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$. Como nos interesa que una cónica esté en posición vertical u horizontal, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\theta \in (0, \pi/2)$.

Determinante nulo. El caso de determinante nulo de la parte cuadrática requiere un tratamiento más ingenioso. Mostraremos que en este caso o bien tenemos una recta, o bien tenemos una parábola. Para ello, escribiremos $Q(x,y)$ de la forma

$$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (\alpha x + \beta y)^2 + \gamma(x^2 + y^2),$$

donde α, β y γ son constantes que dependen de A, B y C. Desarrollando la parte izquierda y derecha, junto al hecho que $AC - B^2 = 0$, no es difícil ver que o bien $\gamma = 0$, en cuyo caso $A = \alpha^2$ y $C = \beta^2$, o bien $\gamma = -\alpha^2 - \beta^2$ en cuyo caso $A = -\beta^2$ y $C = -\alpha^2$. Como ambos casos se tratan de manera similar, supondremos sin pérdida de generalidad que $\gamma = 0$, es decir

$$Q(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2,$$

para $A = \alpha^2$ y $C = \beta^2$. El truco consiste ahora en encontrar dos rectas perpendiculares que definan nuestro nuevo sistema de coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ que describan mejor a nuestra cónica rotada. Esto no siempre es posible, pero dependerá de las constantes involucradas en $K(x,y)$. Como sabemos que $Q(x,y)$ es un cuadrado perfecto, vamos a forzar obtener $K(x,y)$ de la forma $\bar{y}^2 - 4p\bar{x} = 0$ en coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ para alguna constante p, y en la cual $\bar{y}$ tenga involucrado al término $(\alpha x + \beta y)$ que aparece en $Q(x,y)$. Concretamente, vamos a partir buscando constantes reales q, r, s tales que

$$K(x,y) = (\alpha x + \beta y + q)^2 + s(\beta x - \alpha y + r) = 0. \tag{7}$$

Observar que la parte lineal $(\beta x - \alpha y + r)$ está forzada a tener esta forma debido a que buscamos una recta perpendicular a la recta $(\alpha x + \beta y + q)$, lo que se traducirá en un nuevo sistema de coordenadas **perpendiculares**. Determinemos entonces a estas constantes q, r y s.

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y + q)^2 + s(\beta x - \alpha y + r) &= (\alpha x + \beta y)^2 + (2q\alpha + s\beta)x + (2q\beta - s\alpha)y \\ &\quad + q^2 + sr \\ &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + (2q\alpha + s\beta)x \\ &\quad + (2q\beta - s\alpha)y + q^2 + sr.\end{aligned}$$

Al forzar la ecuación (7), es inmediata la necesidad de resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}2q\alpha + s\beta = D \\ 2q\beta - s\alpha = E\end{aligned}\right\}$$

la cual tiene solución única siempre y cuando $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. En este caso las constantes q y s están únicamente determinadas por A, B, C, D y E. Notar que también buscamos $q^2 + sr = F$, de donde obtenemos r. Esto último se puede hacer en la medida que $s \neq 0$, en caso contrario la constante q previamente determinada debe satisfacer $q^2 = F$. Si lo cumple, entonces tenemos solución, si no lo cumple, entonces no hay solución y resulta imposible la ecuación (7). Supongamos por ahora que la solución se tiene, es decir que o bien $s \neq 0$, o bien $s = 0$ y $q^2 = F$. Lo que acabamos de mostrar entonces es que si $AB \neq 0$, entonces

$$K(x,y) = (\alpha x + \beta y + q)^2 + s(\beta x - \alpha y + r)$$

para ciertas constantes q, r y s que dependen de las constantes involucradas en $K(x,y)$. Notar que si $s = 0$, entonces nos queda

$$K(x,y) = (\alpha x + \beta y + q)^2,$$

en cuyo caso $K(x,y) = 0$ tiene por solución la recta $\alpha x + \beta y + q = 0$. Si $s \neq 0$, entonces podemos definir $\bar{x} = \frac{\beta x - \alpha y + r}{\alpha^2+\beta^2}$ y $\bar{y} = \frac{\alpha x + \beta y + q}{\alpha^2+\beta^2}$, de donde se tiene $K(x,y) = (\alpha^2+\beta^2)[\bar{y}^2 + \frac{s}{\alpha^2+\beta^2}\bar{x}]$. Así, en coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ la ecuación $K(x,y) = 0$ corresponde a una parábola horizontal o vertical (rotada en coordenadas x, y) cuya distancia entre foco y vértice está dada por $p = -\frac{s}{4(\alpha^2+\beta^2)}$. Hay 2 casos pendientes. El primero es el de $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, en donde se tiene $A = B = C = 0$. Esto fuerza que se tenga $K(x,y) = Dx + Ey + F$, lo que implica que $K(x,y) = 0$ sea una recta. El segundo es que $s = 0$ y $q^2 \neq F$, en cuyo caso (7) no se verifica. El hecho que (7) no se verifique implica que no existen rectas perpendiculares que me describan la cónica, en particular vamos a tener

$$K(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2 + q'(\alpha x + \beta y) + r',$$

donde $q', r' \in \mathbb{R}$. Si llamamos $u = \alpha x + \beta y$, debemos resolver la ecuación cuadrática $u^2 + q'u + r' = 0$. Esta ecuación puede tener 2 soluciones $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, 1 solución $u_2 \in \mathbb{R}$, o no tener solución. En particular, tendremos que la cónica representa 2 rectas $\alpha x + \beta y = u_0$ y $\alpha x + \beta y = u_1$, o bien 1 recta $\alpha x + \beta y = u_2$, o bien no tiene solución.

La discusión de esta sección lleva en total a los siguientes casos. Cabe decir que cada caso debe ser determinado y analizado a partir de las constantes involucradas en la ecuación cuadrática. Sea $\Delta = AC - B^2$.

$$\Delta \neq 0 \begin{cases} \text{Circunferencia } (A = C, B = 0) \\ \text{Elipse } (\det > 0) \\ \text{Hipérbola } (\det < 0) \\ \text{2 rectas no paralelas} (\det < 0) \\ \text{Punto } (\det > 0) \\ \text{Sin solución } (\det > 0) \end{cases} \qquad \Delta = 0 \begin{cases} \text{Parábola } (s \neq 0) \\ \text{2 rectas paralelas} \\ \text{1 recta} \\ \text{Sin solución} \end{cases}$$

Ejemplos. A continuación estudiaremos algunos casos a modo de explicitar el método. La mayoría de los cálculos se dejarán al lector.

(1) Estudiar la ecuación $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$.

Se tiene que $A = 8$, $B = 2$ y $C = 5$, por lo que el determinante es $AC - B^2 = 36 > 0$. Por lo que vimos anteriormente estamos en el caso potencial de una elipse. Para encontrar su centro, debemos resolver

$$\left.\begin{aligned} 8h + 2k + 8 = 0 \\ 2h + 5k + 2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

de modo que $(h,k) = (-1,0)$. Reemplazando $\bar{x} = x - h = x + 1$ y $\bar{y} = y - k = y$, nos queda

$$8\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 - 36 = 0.$$

Para desrotar la cónica, buscamos $\theta \in [0, 2\pi)$ de modo que

$$\tan(2\theta) = \frac{2B}{A-C} = \frac{4}{3},$$

o equivalentemente usando la identidad de la tangente del ángulo doble

$$2\tan^2(\theta) + 3\tan(\theta) - 2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, nos queda que $\tan(\theta) = 1/2, -2$, siendo solo el primer caso el de un ángulo agudo. Si $\tan(\theta) = 1/2$ quiere decir que $\sin(\theta) = 1/\sqrt{5}$ y $\cos(\theta) = 2/\sqrt{5}$. Luego buscamos coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}$ de modo que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tilde{x}\cos(\theta) - \tilde{y}\sin(\theta) \\ \bar{y} &= \tilde{x}\sin(\theta) + \tilde{y}\cos(\theta) \end{aligned}$$

lo que transforma la ecuación en

$$45\tilde{x}^2 + 20\tilde{y}^2 - 180 = 0,$$

o mejor

$$\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1.$$

Esto muestra que el eje mayor de la elipse está en el eje $\widetilde{Y}$, es decir cuando $\widetilde{X} = 0$. Como conocemos los valores de $\tilde{x}, \tilde{y}$ en función de $\bar{x}, \bar{y}$ y x, y, no es difícil obtener que el eje mayor de la elipse está dado por la ecuación $2x + y - 2 = 0$ y el eje menor es $x - 2y + 1 = 0$. El eje mayor mide 6 unidades mientras que el eje menor mide 4 unidades. La excentricidad vale $\sqrt{5}/3$. Los focos de la elipse son los puntos $(-2, 2)$ y $(0, -2)$ en coordenadas x, y.

(2) Estudiar la ecuación $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

Se tiene que $A = 4$, $B = 12$ y $C = 11$, por lo que $AC - B^2 = -100$, es decir estamos en el caso potencial de una hipérbola. Para encontrar su centro, resolvemos

$$\left.\begin{aligned} 4h + 12k + 32 &= 0 \\ 12h + 11k + 21 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

de modo que $(h, k) = (1, -3)$. Reemplazando $\bar{x} = x - 1$ y $\bar{y} = y + 3$, nos queda

$$4\bar{x}^2 + 24\bar{x}\bar{y} + 11\bar{y}^2 + 20 = 0.$$

Eliminando el término $\bar{x}\bar{y}$ de la ecuación, resolvemos

$$\tan(2\theta) = \frac{2B}{A - C} = -\frac{24}{7},$$

o de manera equivalente

$$12\tan^2(\theta) - 7\tan(\theta) - 12 = 0.$$

La ecuación anterior tiene solución $\tan(\theta) = \frac{4}{3}$, luego $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$ y $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$. Rotando en ángulo θ, se tiene

$$\bar{x} = \frac{3\tilde{x} - 4\tilde{y}}{5} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{4\tilde{x} + 3\tilde{y}}{5}.$$

Finalmente, esto transforma a la ecuación en

$$500\tilde{x}^2 - 125\tilde{y}^2 + 500 = 0,$$

o de forma equivalente

$$\frac{\tilde{y}^2}{4} - \tilde{x}^2 = 1.$$

El resultado muestra que el eje $\widetilde{Y}$ es el eje de la hipérbola. Además, se cumple que el eje mayor mide 2, el eje menor 1, y $c = \sqrt{5}$. La excentricidad es igual a $\sqrt{5}/2$. Con las transformaciones hechas, las coordenadas (x, y) se escriben en términoss de las coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}$ como

$$x = \frac{3\tilde{x} - 4\tilde{y}}{5} + 1 \quad \text{y} \quad y = \frac{4\tilde{x} + 3\tilde{y}}{5} - 3,$$

y recíprocamente

$$\tilde{x} = \frac{3x + 4y + 9}{5} \quad \text{y} \quad \tilde{y} = \frac{-4x + 3y + 13}{5}.$$

El eje principal siendo $\tilde{x} = 0$ implica que en coordenadas x, y tiene la forma $3x + 4y + 9 = 0$. Los focos son $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, \pm\sqrt{5})$, o equivalentemente $(\mp\frac{4}{\sqrt{5}} + 1, \pm\frac{3}{\sqrt{5}} - 3)$. Las asíntotas verifican $\tilde{y}/\tilde{x} = \pm 2$, o equivalentemente $2x + y + 1 = 0$ y $2x + 11y + 31 = 0$
.

(3) Estudiar la ecuación $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 109 = 0$.

Se tiene que $A = 9$, $B = 12$ y $C = 16$, por lo que $AC - B^2 = 0$. Estamos entonces en el caso potencial de una parábola. Como $A = 9$ y $C = 16$, trabajaremos con $\alpha = 3$ y $\beta = 4$. Buscamos resolver

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 109 = (3x + 4y + q)^2 + s(4x - 3y + r).$$

Desarrollamos el lado derecho de la igualdad anterior y nos queda

$$\begin{aligned}(3x + 4y + q)^2 + s(4x - 3y + r) &= (3x + 4y)^2 + 2q(3x + 4y) + q^2 + 4sx - 3sy + sr \\ &= 9x^2 + 24xy + 16y^2 + (6q + 4s)x + (8q - 3s)y + q^2 + sr.\end{aligned}$$

Buscamos entonces resolver la ecuación

$$\left.\begin{aligned}6q + 4s &= -18 \\ 8q - 3s &= 226,\end{aligned}\right\}$$

que tiene solución $s = -30$ y $q = 17$. Con ello $r = 6$. Como $s \neq 0$, es claro que la ecuación representa una parábola que en coordenadas

$$\bar{x} = \frac{3x + 4y + 17}{5}, \; \bar{y} = \frac{4x - 3y + 6}{5}$$

tiene ecuación $\bar{x}^2 = 6\bar{y}$. En particular, la distancia foco-vértice está dada por $3/2$.

(4) Estudiar la ecuación $3x^2 - 8xy + 7y^2 + 10x - 20y + 15 = 0$.

Se tiene que $A = 3$, $B = -4$ y $C = 7$, por lo que el determinante es $AC - B^2 = 5 > 0$, es decir estamos en el caso potencial de una elipse. Para encontrar su centro debemos resolver

$$\left.\begin{aligned}3h - 4k + 5 &= 0 \\ -4h + 7k - 10 &= 0,\end{aligned}\right\}$$

de modo que $(h, k) = (1, 2)$. Reemplazando $\bar{x} = x - 1$ y $\bar{y} = y - 2$, nos queda

$$3\bar{x}^2 - 8\bar{x}\bar{y} + 7\bar{y}^2 = 0.$$

Notemos que $F' = 0$, por lo que podemos dividir por $\bar{x}^2$ o $\bar{y}^2$ dependiendo si $\bar{x} \neq 0$ o $\bar{y} \neq 0$. Si $\bar{x} \neq 0$, entonces

$$7(\bar{y}/\bar{x})^2 - 8(\bar{y}/\bar{x}) + 3 = 0,$$

ecuación cuadrática que no tiene solución real. Así solo el punto $\bar{x} = 0 = \bar{y}$ es solución.