Magíster en Matemáticas PUCV
Examen de Admisión 2020

Instrucciones:

- Este examen consiste de dos partes en un total de 3 páginas.
- Son 3 problemas por parte, y el postulante debe resolver 2 de 3 problemas en cada una.
- El tiempo disponible por parte es de hora y media, para un total de 3 horas.

Parte I: Análisis

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de numeros reales tal que

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{n}, \qquad x_1 = 1.$$

.

(i) Pruebe que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. ¿Cuál es el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(ii) Pruebe que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente. ¿Cuál es el valor de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$?

2. Sea a un número real no nulo y $M_a = \{\{na\} : \ n \in \mathbb{N}\}$. ($\{x\} \in [0,1)$ es la parte fracionaria de x, es decir $x - \{x\}$ es entero). Pruebe que M_a es denso en $[0,1]$ si y solo si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Sea (M,d) un espacio métrico compacto.

(i) Pruebe que M es separable, es decir M contiene un subconjunto numerable denso.

(ii) Sea $\mathcal{C}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$, con la norma del supremo:

$$\|f\| = \sup_{x\in M} |f(x)|.$$

Sea $\mathcal{L}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \ |f(x) - f(y)| \leq d(x,y), |f(x)| \leq 1, \forall x, y \in M\}$. Pruebe que $\mathcal{L}(M)$ es compacto en $\mathcal{C}(M)$.

Parte II: Álgebra

1. Sea $M_2(F)$ el conjunto de matrices de 2×2 sobre un cuerpo F.

(i) Demostrar que

$$\mathfrak{sl}_2(F) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(F) \mid a + d = 0 \right\},$$

es un espacio vectorial sobre F de dimensión 3, y encontrar una base.

(ii) Sea $[\cdot,\cdot] : M_2(F) \times M_2(F) \to M_2(F)$, la función definida por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Demostrar que $[\cdot,\cdot]$ es bilineal, y satisface

$$[X, X] = 0, \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(iii) Dada $A \in \mathrm{GL}_2(F)$, demostrar que

$$T_A : \mathfrak{sl}_2(F) \to M_2(F),\ X \mapsto AXA^{-1},$$

es una transformación lineal, y de hecho

$$T_A : \mathfrak{sl}_2(F) \to \mathfrak{sl}_2(F).$$

(iv) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Encontrar la matriz asociada a T_A con respecto a la base encontrada para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

2. Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $i^2 = -1$, el anillo conmutativo de enteros Gaussianos.

(i) La norma es la función

$$\mathrm{N} : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad a + ib \mapsto a^2 + b^2.$$

Demostrar que se tiene

1. $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$.
2. $\mathrm{N}(x) = 1 \iff x \in \mathbb{Z}[i]^\times$, i.e., x es un elemento invertible en $\mathbb{Z}[i]$.
3. $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$.

(ii) Encontrar el grupo de unidades $\mathbb{Z}[i]^\times$, i.e., encontrar los elementos invertibles.

(iii) En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, encontrar dos factorizaciones distintas de 1.

(iv) ¿Puede ser $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ un dominio Euclidiano?

3. Considerar el polinomio $f(x) = x^4 - x^2 - 2$.

(i) Demostrar que es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

(ii) Encontrar su cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

Dado un primo p, sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo finito con p elementos. Encontrar p tal que

(iii) $f(x)$ sea reducible en $\mathbb{F}_p[x]$.

(iv) $f(x)$ sea irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$.