

Taller de Olimpiadas - 06 IMA

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - IMA.

S. Herrero, F. Riquelme, R. Saghin, F. Valenzuela 04-06-2019

1. Sean ABC un triángulo equilátero de lado 1 y P un punto dentro del triángulo. Muestre que $AP + BP + CP \geq \sqrt{3}$.
2. Sean E, F, K y L puntos sobre los lados AB, BC, CD y DA del cuadrado $ABCD$, respectivamente. Muestre que si los segmentos EK y FL son perpendiculares entonces $EK = FL$.
3. Un cuadrilátero convexo queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos. Como es el cuadrilátero si los cuatro triángulos tienen la misma área?
4. En el triángulo ABC , la altura AD , la bisectriz BM y la mediana CC' son concurrentes en un punto O . Muestre que si $AO = BO$ entonces ABC es equilátero.
5. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se construyen triángulos equiláteros ABF y ADE hacia el exterior de $ABCD$. Pruebe que el triángulo FCE es equilátero.
6. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto sobre el arco BC del circuncírculo. Muestre que $AP = BP + CP$.
7. Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo $ABCD$. Sea E el pie de la perpendicular de C a la recta por A y B , y F el pie de la perpendicular de C a la recta por A y D . Muestre que $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.
8. Considere una circunferencia de diámetro AB . Sobre la tangente al círculo por B , tome dos puntos C y D . Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E , demuestre que $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.
9. $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD . Las bisectrices exteriores de los ángulos en B y en C se intersectan en P . Las bisectrices exteriores de los ángulos en A y en D se intersectan en Q . Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro de $ABCD$.
10. Encuentre un punto dentro de un cuadrilátero convexo donde la suma de las distancias del punto a los vértices sea mínima.