Sistemas de raíces y clasificación

Datos del Cursillo

Semana de la Matemática
Profesor: Luis Lomelí (`luis.lomeli@pucv.cl`)

Descripción del cursillo

Los sistemas de raíces hacen su aparición en la clasificación de grupos algebráicos y grupos de Lie semisimples. Estos grupos y sus álgebras de Lie correspondientes, se clasifican de acuerdo a sus sistemas de raíces. Éstos caen dentro de las siguientes posibilidades:

(i) Grupos de tipo A_n, B_n, C_n ó D_n, que corresponden a los grupos clásicos.
(ii) Grupos de tipo E_6, E_7, E_8, F_4 ó G_2, que serían grupos excepcionales.

Trabajamos con la notación Bourbaki, la cual ya se ha hecho un estándar en esta área de investigación.

Comenzaremos con sistemas de raíces en abstracto y trabajaremos sobre los números reales. Estos sistemas cuentan con la propiedad que se clasifican utilizando herramientas de álgebra lineal y combinatoria, por lo cual proponemos mantener el nivel del cursillo accesible a los estudiantes. Exploraremos todas las posibilidades en dimensión 2. Ésto nos provee con intuición geométrica para abordar el caso general, dado que nos dicta las posibilidades para el ángulo que debe formar un par de vectores en el sistema.

A cada raíz en el sistema, corresponde una reflexión en el espacio vectorial generado por el sistema. El grupo generado por estas reflexiones es conocido como el grupo de Weyl. Presentaremos el concepto de bases para el sistema, raíces simples y discutiremos las diferentes cármaras de Weyl. Fijar una cámara es equivalente a fijar una base de raíces simples y nos permite hablar de raíces positivas.

Los sistemas de raíces irreducibles se clasifican por medio de diagramas de Dynkin. Éstos son grafos de Coxeter con información adicional. Se les asigna una matriz de Cartan correspondiente y estudiamos la combinatoria del grafo.

Un aspecto importante, es que para cada diagrama de Dynkin, existe un grupo algebráico justamente con ese sistema de raíces. Este resultado es conocido como el teorema de existencia de Chevalley. Los grupos algebráicos, se determinan de esta manera, aunque no se distingue entre grupos isógenos. Para solucionar este problema de unicidad, pasamos del concepto de sistema de raíces a *datum de raíces*. La información adicional proporcionada por el dual del sistema, y su par asociado, no solamente nos ayuda a clasificar los grupos semisimples, sino que clasifica completamente la clase más general conocida como los grupos reductivos.

Discutiremos ejemplos de sistemas de raíces y grupos reductivos. Éstos proveen la base para el estudio de sus representaciones. Actualmente, un área de investigación matemática de gran interés consiste en explorar las conexiones existentes entre la teoría de representaciones sobre grupos reductivos y la teoría de números.

Referencias

N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6.*
James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.*