XLI SEMANA DE LA MATEMÁTICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
Octubre 2015

DINÁMICA HOLOMORFA EN EL PLANO COMPLEJO.

Francisco Valenzuela Henríquez

RESUMEN: En este cursillo visitaremos algunos tópicos relativos al estudio de la dinámica de funciones holomorfas en el plano complejo, con especial énfasis en la descripción de la dinámica de polinomios.

Introducción:

Los sistemas dinámicos es el área de la matemática que se dedica a estudiar fenómenos naturales que incluyen el tiempo. El movimiento de los planetas o la posición de las particulas que participan en una reacción química son algunos ejemplos de estos sistemas. Dentro de la abstracción matemática, podemos modelar estos ejemplos considerando una ley de evolución

$$F : \mathbb{T} \times X \to X$$

donde el conjunto X es un espacio métrico; $\mathbb{T}$ puede ser $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{R}$ (más generalmente un semi–grupo); la función F considerada es continua y satisface la propiedad $F(n+m, x) = F(n, F(m, x))$ para todo $n, m \in \mathbb{T}$ y $x \in X$.

En adelante, consideramos la dinámica inducida por una aplicación continua $f : X \to X$. Más precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$ y denotando por

$$f^0 = id_X \qquad \text{y} \qquad f^n = f \circ \cdots \circ f \quad \text{compuesto } n\text{–veces.}$$

Con esto podemos definir $F : \mathbb{N} \times X \to X$ a través de la igualdad

$$F(n, x) = f^n(x).$$

Dado que la función f considerada está fija, en adelante nos referiremos al estudio de la dinámica de f en vez de F.

Uno de los objetivos centrales del área es poder predecir que va ocurrir con la evolución de un punto en el futuro. Para este objetivo, nos interesa poder describir, ya sea desde una perspectiva topológica, geométrica o en el sentido de la teoría de la medida, lo que ocurre con la evolución de un punto $x \in X$.

Más precisamente, dado $x \in X$ definimos *la órbita de x según f* como el conjunto

$$\mathcal{O}(x) := \mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Por tanto, centramos nuestra atención en tratar de describir la naturaleza del conjunto $\mathcal{O}(x)$ para cada $x \in X$, o al menos para la mayoría de los x, es decir, c.t.p $x \in X$ en el sentido de la medida.

En este minicurso, nuestro espacio de referencia es el conjunto de los números complejos que denotamos por $\mathbb{C}$, y la ley de evolución es definida por un polinomio de grado d, a saber:

$$f(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_d \neq 0$ y $d \geq 2$.

Un poco de historia:

El estudio de la dinámica de funciones de una variable compleja, tuvo sus primeros comienzos con los trabajos seminales debidos a los matemáticos franceses Gaston Julia y Pierre Fatou alrededor de 1918–20, aunque sus orígenes se encuentran tal vez antes, en el siglo XIX, en la obra más geométrica de Schottky, Poincaré, Fricke y Klein.

Esta tuvo un segundo gran florecimiento en los últimos 30 años, motivado en parte por las espectaculares imágenes generadas por computador que aparecen a partir de 1980. Otro motivo es por el crecimiento explosivo en el estudio de los sistemas dinámicos que comenzó aproximadamente en la misma época, y no menos importante por el trabajo revolucionario en geometría hiperbólica tridimensional iniciada por Thurston en la década de 1980.

Algunos de los autores más importantes en actividad que han realizado serias aportaciones en al área durante los últimos 30 años son Mandelbrot, Douady, Hubbard, Sullivan, Milnor, Thurston, Lyubich, Yoccoz y McMullen. Hoy en día, el área todavía es un foco importante de estudio con importantes conjeturas abiertas[1]. La mayoría de los métodos usados son fuertemente basados en el análisis en una variable.

[1] Por ejemplo, la Conjetura de Hiperbolicidad.

La familia cuadrática:

Leyes de evolución simples pueden definir comportamientos muy complicados. Un ejemplo de esta fenomenología es dada por la familia cuadrática que está definida por

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

donde $c \in \mathbb{C}$, y que será el objeto central de ejemplos en este minicurso.

A modo de ilustración, en este pequeño texto introductorio analizaremos la dinámica de la función más simple presente en esta familia: a saber, la dinámica de la función $f_0(z) = z^2$.

Para ello, recordemos que todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ puede ser escrito en su expresión polar: existe $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Con esto, notemos que

$$f_0(z) = z^2 = r^2e^{i2\theta} = r(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

Si denotamos por $|\cdot|$ la norma en los números complejos dada por

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

podemos determinar en gran medida la evolución de la órbita de todo $z \in \mathbb{C}$. Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos describir el conjunto

$$\mathcal{O}(z) = \{f_0^n(z) = z^{2^n} \, : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Cuando $|z| = r > 1$, no es dificil ver que

$$|f_0^n(z)| = r^{2^n} \to \infty$$

cuando $n \to \infty$. De igual forma, si $|z| < 1$ se verifica que $|f_0^n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además es importante notar que debido a que la función f_0 dobla ángulo en cada iterada, entonces "la forma" en que se produce esta convergencia en ambos casos es de forma "espiral".

Es importante notar que $0 \in \mathbb{C}$ es un punto especial para la dinámica de f_0. Primero observe que la órbita de cero es finita, a saber $\mathcal{O}(0) = \{0\}$.

En general, cuando la órbita de un punto z_0 es finita decimos que z_0 *es un punto periódico*. En tal caso, definimos el *periodo* de z_0 como la cardinalidad del conjunto órbita, es decir, z_0 tiene periodo n si $\#\mathcal{O}(z_0) = n$. Cuando el periodo de un punto periódico z_0 es igual a uno, decimos que es un *punto fijo*. De esto, tenemos que 0 es un punto fijo para la función f_0.

Otra herramienta importante a considerar a la hora de estudiar los puntos periódicos de un polinomio f es mirar su naturaleza "infinitesimal". Más precisamente, dado z_0 un punto periódico de periodo n decimos que este es:

1. *Atractor:* si $|(f^n)'(z_0)| < 1$.
2. *Superatractor:* si $|(f^n)'(z_0)| = 0$
3. *Repulsor:* si $|(f^n)'(z_0)| > 1$.
4. *Indiferente:* si $|(f^n)'(z_0)| = 1$.

Vale destacar que esta clasificación describe localmente en terminos dinámicos lo que sucede localmente en torno a un punto periódico. De lo anterior se sigue que 0 es un punto fijo super atractor, dado que $f_0'(z) = 2z$.

Por otro lado, observemos que los puntos fijos de f_0 satisface la ecuación

$$f_0(z) = z^2 = z,$$

lo que implica que, aparte de cero, el otro punto fijo de la función es $z_0 = 1$. Dicho punto, es un punto fijo repulsor pues $|f_0'(1)| = 2$.

Por otro lado, si queremos encontrar los puntos periódicos de periodo n, no es difícil notar que son los puntos que satisfacen la ecuación algebraica

$$f_0^n(z) = z^{2^n} = z.$$

Dado que 0 es una solución de dicha ecuación se sigue que las soluciones distintas de cero son los puntos que satisfacen la igualdad

$$z^{2^n-1} = 1,$$

es decir, las $(2^n - 1)$–raíces de la unidad dadas por la igualdad

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)$$

donde $k = 0, \ldots, 2^n - 2$. En particular, los puntos periódicos distintos de cero son puntos contenidos en el círculo unitario puesto que $|\omega_k| = 1$ y por lo tanto son puntos periódicos repulsores. Finalmente, si denotamos por $\mathcal{P}er_r(f_0)$ al conjunto de los puntos periódicos repulsores, no es difícil verificar que

$$\overline{\mathcal{P}er_r(f_0)} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\} =: \mathbb{S}^1.$$

Más aún, $\mathbb{S}^1$ es un conjunto compacto y completamente f_0–invariante, es decir, $f_0(\mathbb{S}^1) = f_0^{-1}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

Y en el caso general...:

Los objetos básicos dinámicamente descritos para la función f_0 son componentes que se presentan en el contexto general en la dinámica de polinomios. Por lo tanto el objetivo de este minicurso es comprender, quizas con falta de rigurocidad, estos objetos básicos y obtener (en algún sentido) una visión global de la dinámicas de polinomios.

Enumerando sucintamente, identificamos tres conjuntos importantes asociados a un polinomio f: el conjunto de *Julia lleno*, dado por

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} \,:\, (f^n(z))_n \text{ es acotado}\},$$

el conjunto

$$J_f = \partial K_f$$

es llamado el conjunto de *Julia*, y

$$\mathcal{F}_f = \mathbb{C} \setminus J_f$$

denota el conjunto de *Fatou*.

Los puntos de K_f^c son los puntos que escapan al infinito por iteradas de f. Para la función f_0 de la familia cuadrática corresponde a los puntos con norma mayor que uno. El conjunto de Fatou $\mathcal{F}_f$ esta compuesto por los puntos que escapan a infinito, y componentes (abiertos conexos) con una dinámica “simple” (cuencas de atracción de órbitas periódicas atractoras, componentes preperiódicas, etc.). Y el conjunto de Julia J_f es un conjunto compacto, completamente f–invariante y es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores.

En otras palabras, el interés dinámico es estudiar o describir en gran medida el conjunto de Julia. Este conjunto corresponde ser el conjunto con dinámica caótica (entropía positiva). Además, podemos observar la conexidad o disconexidad total de J_f, conforme podamos entender la dinámica de los puntos críticos.