

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

**PROGRAMA DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS**



TESIS

para la obtención del grado de
DOCTOR EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

María Soledad Estrella Romero

**EL OBJETO TABLA:
UN ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO, COGNITIVO Y DIDÁCTICO**

Tesis dirigida por
Dr. Arturo Mena Lorca
Dr. Dani Ben-Zvi

Valparaíso, enero de 2014.

CHILE

EL OBJETO TABLA:
UN ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO, COGNITIVO Y DIDÁCTICO

de

María Soledad Estrella Romero

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el 22 de enero de 2014 ante la Comisión de Tesis integrada por:

Dr. Dani Ben-Zvi	University of Haifa	Profesor externo
Dr. Arturo Mena Lorca	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Profesor interno
Dr. Jaime Mena Lorca	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Profesor interno
Dra. Astrid Morales Soto	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Profesor interno
Dr. Roberto Vidal Cortés	Universidad Alberto Hurtado	Profesor externo

Año 2014
CHILE

Agradecimientos

Como becaria expreso mi más profunda gratitud a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y a su Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática del Instituto de Matemáticas.

Agradezco a los profesores del Programa, quienes proveyeron un espectro amplio de visiones teóricas y su respectivo debate. Agradezco el ambiente siempre tolerante y acogedor de los Seminarios, que facilitó mi atrevimiento académico, y los espacios de libertad que me llevaron a caminos inexplorados, cuestionamiento de ideas vigentes y a mis propias interpretaciones teóricas. Agradezco a todos los estudiantes de doctorado con quienes compartimos este desafío, con particular cariño a los *apoeinos*, Alejandro e Isabel.

Mi agradecimiento al Centro de Investigación Avanzada en Educación, proyecto CIAE 05, que apoyó el financiamiento de los estudios con profesores y alumnos; también, a todos ellos mi respeto y agradecimiento por abrir sus aulas y cuadernos a mi investigación.

Con especial afecto, doy gracias a mi director de tesis en Chile, el Dr. Arturo Mena Lorca por acompañarme en estos tres años, por su reconocida sapiencia, excepcional capacidad de trabajo e ingenioso humor. Y a mi codirector de tesis en Israel, el Dr. Dani Ben-Zvi, por su generosidad y entusiasmo, porque su investigación de excelencia y visión sobre la Educación Estadística inspiraron gran parte de este trabajo.

A mis muy queridos hijos y a sus vetas de *profe*, a Juan José, a Trinidad y a Sol Jesús; a Raimundo por nuestras largas discusiones académicas y su compromiso con la educación y la matemática; a mi erudita madre y mi hermana Patricia, quienes recorren el camino de educadoras con dedicación y amor; y a mis hermanos Christian y Ercilia, por su cariño.

Por último agradezco y doy fe, de la presencia de Dios en todo este caminar y las muchas bendiciones con que ha iluminado mi vida.

Viña del Mar, 2014

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DE LA TESIS	ix
RESUMEN DE LA TESIS	x
CAPÍTULO I. FUNDAMENTACION DEL ESTUDIO	1
Resumen del Capítulo	2
1. Introducción	3
2. Problemáticas que aborda la tesis	3
<i>Exigencia social de inserción de la estadística en la escuela</i>	
3. Estatus actual de la tabla en el currículo chileno	5
4. Cuestiones que delimitan la evolución de la tesis	6
<i>Experticia de la autora que enriquece el estudio</i>	
<i>Potencialidades de la tabla para el tratamiento de datos</i>	
<i>La definición de tabla y su uso escolar</i>	
5. Resultados de investigación sobre las representaciones estadísticas	9
<i>Estudios sobre tablas y gráficos en el contexto de la Alfabetización Estadística</i>	
<i>Estatus de la comprensión de las representaciones tabulares</i>	
6. Problemáticas que origina la inclusión de la estadística en el currículo	12
7. Las preguntas que orientan la investigación	13
8. Los objetivos del trabajo de tesis	15
<i>Objetivos específicos</i>	
CAPITULO II. REVISIÓN DE LITERATURA Y MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN	19
Resumen del Capítulo	20
1. Introducción	21
2. Dificultades que presenta el formato tabular	21
2.1. Las exigencias cognitivas asociadas a la lectura de una tabla	
2.2. Consecuencias para su enseñanza y aprendizaje	
3. Enfoque Cognitivo	28
3.1. La perspectiva del aprendiz: Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud	
3.2. La perspectiva del enseñante: Nivel de Demanda Cognitiva de Stein y Smith	
3.3. Razonamiento y Pensamiento Estadístico	
3.3.1 La Transnumeración de Wild y Pfannkuch	
3.4. Ideas estadísticas fundamentales	
4. Enfoque Didáctico	43
4.1. Un Modelo de Educación Estadística	
4.1.1. Ambiente de Aprendizaje para Razonamiento el Estadístico, de Garfield y Ben-Zvi	
4.2. El Estudio Clases	
5. A modo de Resumen del Capítulo	49

CAPITULO III. HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LAS TABLAS	51
Resumen del Capítulo	52
1. Introducción	53
2. Noción general de tabla	56
3. Tablas antiguas y noción de número	57
3.1. Tablas prehistóricas: características y aparición de los números	
3.2. Tablas mesopotámicas: cuantificadores, medidas y números	
3.3. Tablas egipcias: fracciones y astronomía	
3.4. Tablas mayas: calendario y números	
3.5. Culturas andinas: Quipu	
4. Las tablas y el concepto de función	70
4.1. Concepto de función	
4.2. Tablas y funciones en Mesopotamia	
4.3. La Hélade: interpolación e infinitésimos	
4.4. Tablas europeas y astronomía	
4.5. Las tablas y los cálculos expeditos	
4.5.1. Cálculos expeditos: Ramón Picarte	78
4.6. Diversos propósitos de las tablas	
4.7. Las tablas y el concepto formal de función	
5. Matemática de las tablas	84
5.1. Descripción de una tabla	
5.2. Operaciones con tablas	
5.3. Estructura algebraica	
5.3.1. Álgebra asociativa	
5.3.2. Álgebra-tabla	
5.3.3. Aplicaciones	
6. Peirce: tablas y pensamiento	90
6.1. Tablas de lógica	
6.2. Pensamiento abductivo	
7. Conclusiones del Capítulo	92
7.1. Algunas reflexiones	
CAPÍTULO IV. HACIA UNA DIDÁCTICA DE LAS TABLAS	96
Resumen del Capítulo	97
Introducción	98
1. Tabla en Informática	99
1.1. Introducción	
1.2. Estructuras de la tabla: física, funcional, semántica y lógica	
1.3. Las tablas en la web	
1.4. Modelo genérico para la tabla	
1.5. Concatenación de tablas en un texto escolar	

2. Tabla en Estadística	109
2.1. Introducción	
2.2. Breve recorrido histórico de las tablas en Estadística	
2.3. Noción de tabla estadística	
2.4. Algunos criterios para construir tablas estadísticas	
2.4.1. Otros criterios de presentación de tablas	
2.4.2. Otras consideraciones para presentar datos	
2.4.3. Aspectos relevantes al construir tablas	
2.4.4. Aspectos relevantes al interpretar tablas	
2.4.5. Consideraciones generales	
2.5. Las tablas en Educación Estadística	
3. Tabla en el currículo escolar	124
3.1. Introducción	
3.2. Currículo escolar en Mesopotamia: <i>tablets</i> escolares en Nippur	
3.2.1. Rol de la tabla en la matemática escolar de Nippur	
3.3. Currículo escolar de Chile: las tablas en el eje de Estadística	
3.3.1. Análisis de las Bases Curriculares 2012 de 1.º a 6.º del eje Datos y Probabilidades en la asignatura de Matemática	
3.3.2. Tablas y gráficos en las Bases Curriculares 2012 de 1.º a 6.º	
3.3.3. Crítica a la visión general de los objetivos de aprendizaje del currículo	
3.3.4. Algunos aportes sobre la representación tabular	
3.4. Las tablas en la Estadística escolar en currículos: Inglaterra, Brasil y Singapur	
3.4.1. Currículo de Inglaterra	
3.4.2. Currículo de Brasil	
3.4.3. Currículo de Singapur	
3.4.4. Comentarios	
4. Tabla en evaluaciones internacionales	145
4.1. Introducción	
4.2. Las tablas en la prueba TIMMS	
4.3. Revisión de ítems en TIMSS	
4.4. Algunos estudios sobre procesos cognitivos asociados a las representaciones	
4.5. Caracterización de roles de los sujetos enfrentados a tareas referidas a tablas	
5. Conclusiones del Capítulo	158
CAPÍTULO V. CUATRO ESTUDIOS SOBRE TABLAS	161
Resumen del Capítulo	162
1. Introducción a los cuatro Estudios	164

ESTUDIO 1: CONCEPTUALIZACIÓN INICIAL DE LA TABLA

1. Resumen	166
2. Análisis de producciones desde la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud	167
2.1. Introducción	
<i>Perspectiva teórica para analizar las tareas.</i>	
2.2. Metodología	
2.2.1. Participantes	
2.2.2. Recogida de Datos	
2.2.3. Categorías de Análisis	
2.3 Análisis de los Datos y Resultados	
2.3.1. Producciones de representaciones estadísticas	
<i>¿Cómo los alumnos ponen en práctica la tarea?</i>	
2.3.2. Análisis de las producciones	
2.3.2.1. Transnumeración en las producciones	
2.3.2.2. Análisis de la conceptualización según sistemas de representación	
3. Discusión y Conclusiones del Estudio 1	184
<i>Discusión respecto a la transnumeración</i>	
<i>Discusión respecto a la conceptualización</i>	

ESTUDIO 2: DEMANDAS COGNITIVAS EN UNA CLASE DE ANÁLISIS DE DATOS EN PRIMARIA

1. Introducción	191
2. Análisis de la clase desde las Demandas Cognitivas de Stein y Smith	191
2.1. Introducción	
2.2. Metodología	
2.2.1. Participantes	
<i>La escuela y la profesora</i>	
<i>La preparación de la clase</i>	
2.2.2. Recogida de Datos	
<i>La clase</i>	
<i>Entrevistas a la profesora</i>	
<i>Discusión del grupo de Estudio de Clases</i>	
2.3 Resultados	
2.3.1. La estructura de la clase	
2.3.2. La tarea principal	
2.3.2.1. Producción de las representaciones estadísticas	
<i>La tarea puesta en escena por la profesora</i>	
<i>La puesta en práctica de la tarea por los estudiantes</i>	
2.3.2.2. Justificación de las representaciones	
<i>La tarea puesta en escena por la profesora</i>	
<i>La puesta en práctica de la tarea por los estudiantes</i>	
3. Discusión y Conclusiones del Estudio 2	208

ESTUDIO 3: FUNCIONAMIENTO DE UNA TAXONOMÍA DE COMPRESIÓN TABULAR

1. Introducción	213
2. Desarrollo de una taxonomía tabular y su análisis según el método Delphi	213
2.1. Introducción	
2.2. Metodología	
2.2.1. Fase I	
<i>Instrumentos</i>	
<i>Procedimientos</i>	
2.2.2. Fase II	
<i>Sujetos</i>	
<i>Instrumentos</i>	
<i>Procedimientos</i>	
2.3. Resultados	
2.3.1. Resultados de la Fase I	
2.3.2. Resultados de la Fase II	
3. Discusión y Conclusiones del Estudio 3	224
 ESTUDIO 4: ANÁLISIS DE CONCORDANCIA ENTRE TAXONOMÍA GRÁFICA Y TAXONOMÍA TABULAR	
1. Introducción	228
2. Metodología	228
<i>Sujetos</i>	
<i>Diseño</i>	
<i>Análisis</i>	
3. Resultados	231
3.1. Análisis a partir de calificaciones ordinales	
3.2. Análisis a partir de calificaciones dicotómicas	
3.3. Contraste de hipótesis para el grado de acuerdo	
4. Discusión y Conclusiones del Estudio 4	236
 CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	
Resumen del Capítulo	240
1. A modo de Resumen	241
2. Hallazgos y conclusiones desde el estudio epistemológico	242
3. Hallazgos y conclusiones desde el estudio cognitivo	249
4. Hallazgos y conclusiones desde el estudio didáctico	249
<i>Algunos hallazgos desde la revisión de literatura</i>	
<i>Algunos hallazgos desde el currículo</i>	
<i>El Estudio</i>	
5. Aportes	252
6. Perspectivas futuras	254
6.1. Desde el marco teórico	
6.2. Desde los resultados de los Estudios	

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	259
LISTA DE TABLAS	280
LISTA DE FIGURAS	282
ANEXOS	
Anexos Capítulo III	
Anexo III.1. Algunos hitos importantes de las tablas y sus posibles funcionalidades	285
Anexos Capítulo IV	
Anexo IV.1. Descripciones de los ítems según nivel de referencia en TIMSS 2007	286
Anexo IV.2. Características de 12 ítems referidos a tablas de la prueba Internacional TIMSS	291
Anexos Capítulo V	
Anexo V.1. Protocolo de categorización de listas, seudotablas y tablas.	297
Anexo V.2. Producciones tipo listas de los alumnos y alumnas de grado 3	299
Anexo V.3. Plan de Clases: Colaciones	306
Anexo V.4. Resumen cuantitativo de la categorización de clase C, Jueces e investigadores	309
Anexo V.5. Evaluaciones de dos Jueces y dos Investigadores	312
Anexo V.6. Registros de las producciones de los alumnos de grado 3 de la Profesora C	336
Anexo V.7. Comparativo de Demandas Cognitivas, implementación 1 y 2	341
Anexo V.8. Demandas Cognitivas de clases “Colaciones” sobre las transcripciones de la implementación 1 y 2, según dos jueces	342
Anexo V.9. Registro de Análisis de Ítems TIMSS para levantamiento de categorías	343

PRESENTACIÓN DE LA TESIS

La presente Tesis de Grado se enfoca en la tabla como objeto de aprendizaje a tratar en los primeros grados de la escuela.

La autora, basada en motivaciones y experiencias profesionales, para atender las dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la tabla, entra primero en un estudio histórico epistemológico de la misma, tarea sustantiva en el Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y logra desentrañar los elementos constitutivos de la tabla como red rectangular, sus usos sociales en cuanto tipos de lectura. Por otra parte, examina su estatus en el contexto escolar conforme a recolección y análisis exploratorio de datos.

La Tesis establece luego el contexto de exigencias que impone la sociedad al currículo actual, y en tal contexto, sustentándose en las tendencias hoy dominantes en la Educación Estadística, provee los lineamientos para el tratamiento de la tabla en el aula manteniendo altas demandas cognitivas durante el proceso –Stein y Smith–, caracterizando de manera detallada representaciones semióticas y estructuras conceptuales teóricas –Vergnaud– subyacentes que emergen en el proceso de conceptualización de la tabla en los primeros grados escolares. El modelo de aprendizaje para el razonamiento estadístico –Garfield y Ben-Zvi–, y en particular la *transnumeración* –Wild y Pfannkuch– irrumpen como paradigmas que albergan la propuesta de enseñanza, ajustándose así a la exigencia social de renovación curricular y a la tendencia internacional para superar el *status quo* nacional de la aritmetización en Educación Estadística.

El trabajo de Tesis deja en evidencia el estatus *paramatemático* de la tabla en el currículo nacional, que la relega a herramienta y no la considera un objeto de enseñanza, y dilucida la exigencia cognitiva que implica al alumno el estudio de la tabla, explorando frente a tal cometido una taxonomía tabular *ad hoc* y una propuesta de enseñanza crítica, orientada al desarrollo de las competencias de representación y análisis de datos para la toma de decisiones.

RESUMEN DE LA TESIS

El primer capítulo presenta los intereses de la autora en la Educación Estadística y en la problemática a investigar. Además presenta las preguntas de investigación y los objetivos de la misma.

El capítulo 2 presenta la revisión de literatura especializada pertinente a las tablas en Estadística, enfocada en las dificultades de aprendizaje que presenta el formato tabular y en las implicancias para su enseñanza. Además, muestra el referencial teórico de la investigación para lo cognitivo y lo didáctico.

El capítulo 3 ofrece una visión panorámica del proceso de evolución histórica de las ideas sobre tablas, su connotación de herramienta humana, y su surgimiento y desarrollo en diversas culturas y diferentes momentos de la historia, cuestiones que aportan al conocimiento sobre este objeto y sus alcances didácticos. Muestra la trayectoria de la tabla y su presencia como herramienta de almacenamiento, como herramienta de cálculo en sistemas de numeración y de metrología, como herramienta de análisis en ámbitos científicos y/o matemáticos, y su relación con la génesis del número y del concepto de función.

El capítulo 4 entrega el estatus escolar de la tabla. Aborda un objetivo epistemológico sobre la tabla como elemento significativo en el análisis de la circulación del conocimiento y en la normalización del saber. Aunando características del formato tabular desde la Informática y desde la Estadística se propone un modelo genérico para la tabla. Se indaga en aspectos cognitivos, al estudiar las tablas como representaciones que sustentan la construcción de significados de los datos, e identifican roles de los sujetos y procesos cognoscitivos asociados a las tablas estadísticas. Finaliza con el estudio del papel de la tabla en los ítems de una prueba internacional de primaria, y su estatus en el actual currículo chileno y en otros tres países.

El capítulo 5 presenta los cuatro estudios llevados a cabo y que nos aproximan a la comprensión del aprendizaje de la tabla en el nivel escolar. Se comienza con el análisis de las evidencias que emergen de las producciones de los alumnos y de la gestión docente en

la mantención de la exigencia de las tareas, dada una situación de análisis de datos. Se continúa con la caracterización de los tipos de lectura que demanda el tratamiento de las tablas, y se levantan categorías para conformar una taxonomía de comprensión propia para las tablas, la cual finalmente se pone a prueba.

El capítulo 6 finaliza el trabajo de tesis con las conclusiones y hallazgos para una primera exploración del progresivo dominio de la conceptualización de la tabla por parte de alumnos en los primeros años de escolarización, bajo el amparo de los referentes teóricos y los resultados recabados.

Con el fin de ofrecer una panorámica al lector, cada capítulo comienza con una lista ordenada de los contenidos que hemos nombrado “Resumen del Capítulo”.

CAPÍTULO I

Fundamentación del Estudio

*Former les citoyens à la pensée de la variabilité et à la
gestion de l'aléatoire n'est pas seulement, aujourd'hui,
une question socialement vive : c'est aussi
une question didactiquement vive.*
Chevallard y Wozniak (2006).

Resumen del Capítulo

1. Introducción

2. Problemáticas que aborda la tesis

Exigencia social de inserción de la estadística en la escuela

3. Estatus actual de la tabla en el currículo chileno

4. Cuestiones que delimitan la evolución de la tesis

Experticia de la autora que enriquece el estudio

Potencialidades de la tabla para el tratamiento de datos

La definición de tabla y su uso escolar

5. Resultados de investigación sobre las representaciones estadísticas

Estudios sobre tablas y gráficos en el contexto de la Alfabetización Estadística

Estatus de la comprensión de las representaciones tabulares

6. Problemáticas que origina la inclusión de la estadística en el currículo

7. Las preguntas que orientan la investigación

8. Los objetivos del trabajo de tesis

Objetivos específicos

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo aborda el foco, la problemática y las cuestiones que delimitan la evolución del estudio, para finalizar con las preguntas centrales y objetivos de la tesis.

Este trabajo de tesis está inscrito en un marco general de la cognición humana, y en la toma de significado de una representación semiótica: la tabla.

La tesis se focaliza en la Educación Estadística de nivel escolar; más precisamente, se ocupa de dilucidar las exigencias cognitivas que impone la tabla al aprendiz y de determinar las demandas cognitivas a las que recurre el enseñante para orquestar el aprendizaje del análisis de datos.

La investigación se sitúa en el nivel escolar de primaria, donde aún prevalecen las técnicas de papel y lápiz. Ella se centra en los datos, el corazón de la Estadística, para analizarlos y describir su comportamiento, obtener información y tomar decisiones argumentadas.

2. PROBLEMÁTICAS QUE ABORDA LA TESIS

Exigencia social de inserción de la estadística en la escuela

La inserción de la Estadística en la escuela ha forzado una dinámica en las instituciones que no ha sido abordada positiva ni exitosamente en Chile, cuestión que complejiza y dificulta la acción de profesor formado para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, al cual el currículo impone una tarea de enseñanza para la que no tiene experiencia, ni instrucción. Es de esta manera que, en Chile, la Estadística se incluye desde los primeros años a través de toda la escolaridad, convirtiéndose en un desafío difícilmente abordable para los profesores que deben producir este aprendizaje en sus alumnos, y en una fuente de fenómenos didácticos.

Hoy en día en Chile se considera a la Educación Estadística como parte de la enseñanza y del debate en la sociedad; ella está presente en los medios y en la escuela.

En eso, el país está en sintonía con lo declarado por diversos organismos internacionales. Por ejemplo, la *Conferencia Mundial sobre la Ciencia para el siglo XXI*, organizada por la UNESCO y por el Consejo Internacional para la Ciencia, ICSU¹, en su *Declaración sobre la Ciencia y el uso del conocimiento científico*², hecha en Budapest, en 1999, expresa, que "... el acceso al saber científico con fines pacíficos desde una edad muy temprana forma parte del derecho a la educación que tienen todos los hombres y mujeres... la enseñanza de la ciencia es fundamental para la plena realización del ser humano, para crear una capacidad científica endógena y para contar con ciudadanos activos e informados...". Agrega luego: "La enseñanza científica, en sentido amplio, sin discriminación y que abarque todos los niveles y modalidades, es un requisito previo esencial de la democracia y el desarrollo sostenible". Entre los años 2005 y 2008, en Europa se desarrolló un proyecto para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje temprano del razonamiento estadístico en las escuelas europeas de primaria y secundaria³. Más tarde, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) de EE.UU. identificó el análisis de datos y probabilidad como su "Focus of the Year" para el período 2007-2008.

En el año 2010 la Organización de las Naciones Unidas, ONU, instauró el Día Mundial de la Estadística para dar a conocer la importancia de esta disciplina en muchas de las decisiones del gobierno, de las empresas y de la comunidad. La Estadística participa en la planificación de escuelas, hospitales, caminos y mucho más, y entrega información y comprensión sobre tendencias y fuerzas que afectan la vida cotidiana.

Más aún, quienes investigan en Educación Estadística han señalado su convencimiento de que formar ciudadanos en el pensamiento de la variabilidad y de la gestión de la aleatoriedad no es hoy solo una cuestión social sino también una cuestión didáctica, tal como lo expresan Chevallard y Wozniak (2006).

¹ (*International Council for Science*, antiguamente *International Council of Scientific Unions*, de donde las siglas)

² *Declaration on Science and the use of scientific knowledge*.

³ *Enhancing the Teaching and Learning of Early Statistical Reasoning in European Schools* project (2009, <http://www.earlystatistics.net/>)

La mayoría de los currículos escolares del mundo ha incorporado recientemente un eje de Estadística y Probabilidades en la asignatura de Matemáticas desde los primeros años de escolaridad. Este nuevo contenido tensiona a los profesores en ejercicio y en formación, pues su currículo profesional no contiene propuestas consolidadas en cuanto a Estadística y su educación, y tampoco hay en el sistema una tradición de enseñanza de la estadística escolar. Además, ellos no están familiarizados con el análisis de datos, ni con su variabilidad ni con lo no determinista en la matemática (Batanero, Burrill, & Reading, 2011).

Según la información disponible, la relación entre la Matemática y la Estadística escolar no es clara para los profesores; de hecho, no parece que, en general, ellos se cuestionen esa relación y es posible encontrar en las aulas cierta reducción aritmética de la Estadística, lo que comporta “ver” los datos como números y no como números en contexto (Cobb & Moore, 1997).

3. ESTATUS ACTUAL DE LA TABLA EN EL CURRÍCULO CHILENO

La tabla como una representación de uso matemático y estadístico atraviesa todo el currículo. Ella aparece como contenido en la asignatura de Estadística, y también, de modo explícito, en todos los ejes de la asignatura de Matemática. Con funcionalidades y apariencias distintas, con largo uso en lo cotidiano, la tabla surge transparente en las aulas y en textos escolares. En cuanto objeto *paramatemático*, la tabla no constituye un objeto de enseñanza, sino objeto de saber “auxiliar”, necesario para la enseñanza (y el aprendizaje) de los objetos de saber, que debe ser “aprendido” (o mejor “conocido”), pero no es “enseñado” (Chevallard, 1985, 1997).

Hay convenciones conocidas de creación acerca de la tabla, pero ellas no son enseñadas.

Pfannkuch y Rubick (2002) señalan que hay poca investigación sobre los estudiantes en la construcción e interpretación de tablas de datos estadísticos, y que es necesario investigar sobre cómo los alumnos las perciben. En cualquier caso, las investigaciones existentes sostienen que las tablas deberían ser construidas por los alumnos (Cox, 1999); sin embargo, en la enseñanza se dan ya hechas. Más aún, los resultados de tales investigaciones, no parecen llegar a los desarrolladores de currículo ni a los diseñadores de textos escolares (Shaughnessy, 2007).

Nisbet et al. (2003) encuentran que el proceso de reorganizar datos numéricos en frecuencias no es un proceso intuitivo en los niños de los grados 1 a 3; Pfannkuch y Rubick (op.cit) observan que la tabulación de datos es una habilidad que requiere determinar la forma de presentarlos con claridad y sin ambigüedad, lo que implica alguna pérdida de información de los datos, y concluyen en su análisis que tratar esos datos comporta una habilidad “más sofisticada de lo que habíamos pensado” (p. 13).

La tabla estadística es un contenido explicitado en el currículo, ocupado este en “el hacer”, queda aquella como herramienta de transición, en un estado de ‘técnica de tabular’. Así, en cuanto herramienta, podemos reconocer fácilmente el valor pragmático de la tabla, pero parece ser más difícil determinar su valor epistémico, es decir su rol como objeto matemático. Colocar el valor epistémico de la tabla en el sistema didáctico requiere de reflexión y reconstrucción, de modo que situaciones pertinentes de análisis de datos promuevan la emergencia de sus roles de herramienta (técnicas) y de objeto (conceptos) y le otorguen un estatus en la institución de modo de aportar en el aprendizaje de la tabla y de los objetos que involucra.

Este trabajo procura relevar a la tabla, en cuanto a la complejidad entre representaciones en las que interviene, a su invisibilidad en la enseñanza, a su estatus epistemológico de herramienta y objeto, y a su funcionalidad en la estadística escolar.

4. CUESTIONES QUE DELIMITAN LA EVOLUCIÓN DE LA TESIS

Experticia de la autora que enriquece el estudio

La formación académica y la experiencia en proyectos de investigación relativos a la Estadística han permitido a la autora enriquecer y complejizar sus reflexiones educativas en torno a la Didáctica de la Estadística.

En lo relativo a la formación de profesores, tal formación y experiencia, incluye: elaboración, junto a un grupo de académicos pertenecientes también a la Sociedad Chilena de Estadística, SOCHE, de un documento público presentado al Ministerio de Educación de

Chile, titulado “*Recomendaciones para el currículo escolar del eje Estadística y Probabilidad*”, que fue acogido favorablemente; colaboración en la evaluación de los “Estándares para la formación en Matemática de Profesores de Enseñanza Media” del eje Estadística y Probabilidades, que fue realizado en el marco de un proyecto del Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile (CIAE); participación en dos fases de la construcción de ítems para el instrumento evaluativo INICIA, que forma parte del Programa INICIA⁴, el cual es administrado por el Ministerio de Educación a profesionales recién egresados de las instituciones formadoras; participación en la formación inicial y continua de nivel universitario en Didáctica de la Estadística. Ello le ha permitido constatar dificultades tanto de los docentes formadores como de los estudiantes en formación con los conceptos y representaciones de Estadística y Probabilidad.

Asimismo su experiencia docente en primaria y secundaria, y en programas para escolares con talento académico, le han permitido profundizar en las problemáticas concernientes al aprendizaje y enseñanza de la Estadística de los alumnos del sistema escolar.

Por otra parte, en su tesis de Magister en Didáctica desarrolló un instrumento para la evaluación del *conocimiento pedagógico del contenido* de Estadística en profesores de Educación Básica, el cual fue la componente estadística de un proyecto del Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación del Ministerio de Educación, FONIDE 10980⁵, que dio evidencias empíricas de dificultades de niños y adultos en la comprensión de un ítem referido a tablas. Este hallazgo y la revisión de antecedentes sobre representaciones de datos le permitieron ahondar en las dificultades, los errores de los sujetos, niños y adultos, en tareas estadísticas relativas a la comprensión de gráficos y tablas, así como en los obstáculos epistemológicos de los saberes en juego.

⁴ El Programa Inicia es un componente del Programa para el Fomento a la Calidad de la Formación Inicial Docente. Constituye una iniciativa del Ministerio de Educación de Chile que tiene el objetivo de fortalecer la formación de docentes que imparten las instituciones de educación superior del país. Sus líneas estratégicas son la definición de orientaciones para la formación inicial docente y Estándares para cada carrera de Pedagogía; y el diseño e implementación de una Evaluación Diagnóstica de los conocimientos de los egresados de carreras de Pedagogía.

⁵ Proyecto del IV FONIDE, “Conocimiento Pedagógico del Contenido y su incidencia en la Enseñanza de la Matemática Nivel de Educación Básica” de los investigadores Raimundo Olfos e Ismenia Guzmán.

Potencialidades de la tabla para el tratamiento de datos

La *Alfabetización Estadística* incluye habilidades básicas e importantes que pueden ser utilizadas en la comprensión de la información estadística o en resultados de investigación. Estas habilidades incluyen ser capaz de organizar los datos, construir y visualizar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos.

Entre las representaciones de datos en Estadística destacan las tablas y los gráficos; las tablas, en sus roles de soporte de organización de datos y de herramienta de análisis.

La tabla, al registrar todos los datos, apunta a lo específico, y permite mostrar datos que tienen diferentes unidades de medida. En su funcionalidad de comparación, surgen relaciones que interactúan principalmente con el lenguaje (verbal y simbólico), y en forma secundaria con lo visual, ya que su función primordial no es mostrar tendencias sino entregar todos los datos individuales, captando la totalidad de la “realidad” que ellos registran.

Una ventaja de las tablas es que ellas están alejadas de manipulaciones y simplificaciones externas que pueden sufrir los gráficos; su desventaja es que, para una gran cantidad de datos, disminuye su eficacia para mostrar visualmente el comportamiento.

El Análisis Exploratorio de Datos, EDA, (Tukey, 1977) da gran importancia a pensar, conjeturar y aprender sobre los datos antes y durante la construcción de representaciones visuales, y promueve y valora el uso de las representaciones gráficas y tabulares como una buena herramienta de análisis y no solo como medio para registrar datos. Una idea fundamental en EDA es que el uso de diversas y múltiples representaciones de los datos tiene un rol potencialmente positivo en el desarrollo de nuevos conocimientos e intuiciones. Por ejemplo, pasar de datos a tablas, de tablas a gráficos, de listas de números a representaciones tales como la tabla de tallo y hojas, construir gráficos como el de caja que posibilita la comparación entre varias muestras.

La definición de tabla y su uso escolar

Tabla es una palabra polisémica, y como objeto presenta distintas características y funcionalidades interesantes de estudiar. La tabla puede considerarse físicamente como una

red rectangular segmentada, cuyas celdas contienen encabezados y valores dispuestos lógicamente, y cuya función radica en concentrar relaciones semánticas.

Como contenido escolar, la tabla se presenta prácticamente en todas las asignaturas; sus celdas pueden contener solo imágenes, texto o números, o una combinación de los anteriores. Los diferentes contenidos y su localización generan lecturas disímiles: una tabla de tiempos verbales difiere de una de hitos históricos, o de la tabla periódica de elementos químicos, o de las tablas de multiplicar, o las de verdad o de proporcionalidad.

Como contenido a enseñar se encuentra en el programa de Matemática; específicamente, en Estadística, principalmente en cuanto tabla de datos y de frecuencia.

Como ya se comentó, la tabla es ocupada como herramienta pero es soslayada como objeto de enseñanza. El currículo nacional chileno, en el eje de Estadística, (Tratamiento de Datos, o Datos y Probabilidades) de la asignatura de Matemática, solicita que los alumnos sean capaces de recolectar, registrar, analizar, comparar, representar, leer, interpretar y completar tablas.

En la tarea de construcción de la tabla, se necesita un conjunto de requerimientos gráficos y capacidades cognitivas específicas. Algunos de los requerimientos gráficos son situar las categorías en las dos dimensiones, horizontal y vertical, crear las celdas, definir las etiquetas de las categorías, y escribir resultados de cálculos externos o internos en las celdas. Algunas de las habilidades cognitivas específicas implícitas son categorizar a los sujetos en función de una variable, eventualmente, categorizar a los sujetos según una segunda variable, y categorizar en forma cruzada a los sujetos de acuerdo a ambas variables y en ese caso, contar los elementos de cada categoría cruzada (frecuencias).

5. RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN SOBRE LAS REPRESENTACIONES ESTADÍSTICAS

Una revisión de la investigación en Educación Estadística durante 1995 a 2005 fue publicada por Garfield y Ben-Zvi (2007); en ella se ofrece un panorama general de los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en todos los niveles. En particular, señalan, la importancia y complejidad de las representaciones estadísticas se encuentran en líneas de trabajo tales como: el desarrollo del razonamiento acerca de la

distribución, centro y variabilidad; el desarrollo de la comprensión de la estadística por los profesores en formación inicial y continua; errores y concepciones erróneas en el razonamiento sobre la estadística y la probabilidad; la visualización y exploración de datos con herramientas tecnológicas.

Shaughnessy (2007), en el Manual sobre investigación de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* de Estados Unidos, NCTM, sostiene que se requieren líneas de investigación sobre cuestiones conceptuales y cuestiones de la enseñanza en Estadística. Señala un estudio nacional sobre los ítems de estadística aplicados entre 2000 y 2003, cuyos resultados evidenciaron un desempeño pobre (de los alumnos norteamericanos) en ítems que involucraban interpretación o aplicación de información en tablas y gráficos. Entre otros lineamientos, el Manual plantea investigar en propuestas de tareas de análisis de datos de alto nivel cognitivo que promuevan el análisis crítico y múltiples representaciones en el aula escolar; en la línea de la Alfabetización Estadística, propone indagar en la puesta a prueba de la lectura y evaluación crítica de información en tablas y gráficos.

Estudios sobre tablas y gráficos en el contexto de la Alfabetización Estadística

Un libro patrocinado por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) en colaboración con la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE) del año 2011, recoge investigación mundial sobre la enseñanza de la Estadística en la escuela y los desafíos en la enseñanza y la educación de profesores. Aunque centrado en la educación y el desarrollo profesional de los profesores para enseñar Estadística, y los elementos necesarios para dicha formación en los niveles escolares, también incluye investigaciones sobre razonamiento y aprendizaje de profesores y estudiantes. Además, considerando que uno de los componentes de la Alfabetización Estadística es la familiaridad con las ideas de las representaciones gráficas y tabulares, incluye algunas investigaciones que trabajan específicamente en ello, por ejemplo: las de MacGillivray y Pereira-Mendoza acerca de la enseñanza del pensamiento estadístico (Batanero, Burrill, & Reading, eds., 2011), la competencia gráfica de los profesores, de González, Espinel y Ainley (Ibíd.), o ‘enseñar a enseñar’ investigaciones estadísticas de Makar y Fielding-Wells (Ibíd.).

Existen varios estudios sobre la comprensión de gráficos y/o tablas, entre los cuales se cuentan: Arteaga, Batanero, Cañadas, y Contreras (2011), Aoyama, (2007), Espinel (2007), Tauber (2006), Ben-Zvi y Sharett-Amir (2005), Friel, Curcio, y Bright (2001), Ben-Zvi y Arcavi (2001), y Curcio (1989); y estudios basados en la caracterización de la Alfabetización Estadística, como los de Burrill y Biehler (2011), Shaughnessy (2007), Watson (2006), Gal (2002, 2004), Ben-Zvi y Garfield (2004), y Schield (2000, 2006).

Un atributo connatural a las representaciones es la *transnumeración*, proceso que hace referencia a los elementos de pensamiento involucrados en la comprensión de la información relativa a las diferentes representaciones de los datos en sus diversas modalidades (representación tabular, cálculo de resúmenes estadísticos, representaciones gráficas, etc.).

Este término, que identifica al proceso de “cambiar de representación para generar comprensión” (Wild & Pfannkuch, 1999, p. 227), responde a que algunas veces en la exploración de datos una representación pone de manifiesto algo nuevo y desconocido, entregando más comprensión del problema. Shaughnessy (2007) señala, en todo caso, que *transnumeración* es un término que necesita más precisión, y que una cultura de aprendizaje y enseñanza que la estimule podría evolucionar si profesores y desarrolladores curriculares consideraran las recomendaciones avaladas por investigaciones que indican la necesidad de que los alumnos tengan más oportunidades de construir sus propias representaciones de datos más que trabajar en tablas y gráficos ya hechos.

Estatus de la comprensión de las representaciones tabulares

Como se verá más adelante, en el proceso de comprensión de una tabla es necesaria la activación de varios procesos, entre ellos, lectura, búsqueda e interpretación y evaluación. El proceso de producir una tabla implica procesos de escritura, de construcción y compleción. La localización de los datos activa la comprensión de la estructura relacional de la tabla, y enfrenta a una lectura con lenguaje simplificado –sobre la variable y sus categorías– debido a la cantidad eventualmente ingente de información reducida en un espacio bidimensional.

Los procesos de comprensión varían en complejidad según se trate de una tabla con registros de datos, o una de transición para hacer cálculos, o de una tabla que permite el análisis y resulta una herramienta de síntesis en el análisis exploratorio de datos. La lectura comprensiva de una tabla estadística incluye la consideración del contexto y la búsqueda del comportamiento de los datos.

Pfannkuch y Rubick (2002, p.5) identificaron instancias específicas de transnumeración en el pensamiento estadístico: (1) toma de medidas que capturen las características de la situación real; (2) transformación de los datos iniciales en otras representaciones –tales como datos ordenados, gráficos, tablas y medidas estadísticas de resumen– para buscar el sentido en los datos; y (3) comunicación a los demás en términos del sentido de la situación real.

6. PROBLEMÁTICAS QUE ORIGINA LA INCLUSIÓN DE LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO

La reciente inclusión de la Estadística en el currículo escolar plantea nuevas problemáticas a investigar ya desde los primeros niveles de escolaridad. La familiaridad que presenta el formato tabular ha derivado en cierta transparencia del mismo, presente en las escuelas como herramienta pero no como objeto de aprendizaje. En un área tan importante como EDA las representaciones estadísticas como la tabla cobran relevancia, pues permiten descubrir características en los datos que facilitan la resolución de la problemática en cuestión.

La revisión de antecedentes de las investigaciones actuales en Estadística confirma la necesidad de abordar una de las componentes de la Alfabetización Estadística, las representaciones, y, en particular, las tablas de frecuencia en el nivel de primaria, como una herramienta de análisis en la exploración de datos y también como un objeto que está definido, que necesita de examen y con el cual se pueden efectuar operaciones propias de su estructura.

La diversidad funcional de la tabla y su presencia transversal en las asignaturas escolares y en la vida misma requieren de una mirada sobre su aprendizaje y su enseñanza.

Como problema didáctico en Educación Estadística interesa investigar los procesos cognitivos de los aprendices enfrentados a representaciones tabulares y la gestión del profesor en una clase con representaciones estadísticas. Ambos polos requieren de indagaciones empíricas en ambientes escolares de enseñanza y aprendizaje de tablas estadísticas.

La revisión de literatura muestra que, en los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de la Estadística referentes a los primeros años de escolaridad, las preguntas de investigación que se plantean son, principalmente: ¿Cuáles son algunos de los errores y malinterpretaciones⁶ en el razonamiento de Estadística? ¿Cómo llegan los escolares a comprender la Estadística? ¿Cómo desarrollan los alumnos de pedagogía y los profesores en servicio la comprensión de la Estadística? ¿Cómo inician los profesores el reto de *alfabetizar estadísticamente* a sus estudiantes? Garfield y Ben-Zvi (2007) señalan que los estudios del área revisados en su conjunto muestran las dificultades que tienen los estudiantes con el aprendizaje de la Estadística y la necesidad de revisar los métodos de enseñanza.

7. LAS PREGUNTAS QUE ORIENTAN LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo de tesis está inscrito en un encuadre de la Didáctica de la Matemática que se interesa en caracterizar el estatus de la tabla en la sociedad (su funcionalidad histórica, en informática, estadística, el currículo y en evaluaciones internacionales), en identificar las acciones que el enseñante lleva a cabo al implementar una situación de aprendizaje de análisis de datos referida a construcción de tablas (la tarea que propone y la gestión de mantención de demandas cognitivas), y en descubrir cómo los aprendices gradualmente construyen tablas para organizar datos en los primeros grados de escolaridad (la progresión de sus representaciones).

Asumimos que la Estadística escolar es un nuevo campo a estudiar, cuyo objetivo principal es proporcionar una Alfabetización Estadística a los alumnos, enseñanza que exige del profesor nuevas perspectivas y acciones que posibiliten que los aprendices sean capaces de interpretar y evaluar críticamente la información y desarrollen la capacidad para discutir o

⁶ *Misconceptions* en Garfield y Ben-Zvi (2007).

comunicar sus opiniones respecto a esa información y puedan así tomar decisiones fundadas.

Específicamente, como resultado de la escolarización, se espera que el alumno reconozca y sea capaz de interpretar diferentes representaciones de datos, entre ellas, las tablas. Sin embargo, frente a las evidencias de ausencia de la tabla como objeto de aprendizaje, la pregunta que guía esta investigación es:

¿Cómo los niños aprenden las tablas?

Las relaciones contenidas en la tabla posibilitan vislumbrar el comportamiento de los datos asociados a un contexto, y permiten responder y comunicar una problemática. En el uso escolar de las tablas de datos se detectan dificultades, pero hay escasez de investigaciones que precisen las dificultades que tienen los sujetos al tratar con las tablas. La tabla enlaza una estructura física, una localización relacional de los datos y diversas funciones de uso, con un contenido semántico estadístico, todo lo cual contribuye a la complejización del aprendizaje y de la enseñanza de la tabla. Entonces, nos preguntamos:

1. *¿Cómo emerge la noción de tabla en los alumnos de los primeros grados?*
2. *¿Cómo los alumnos construyen significado desde los datos?*
3. *¿Qué representaciones producen los alumnos cuando se enfrentan a una tarea de análisis de datos?*
4. *¿Cuál es el pensamiento tras las representaciones que los alumnos producen?*
5. *¿Qué niveles de conceptualización reflejan tales representaciones?*
6. *¿Qué características tiene la tarea de enseñanza dirigida al análisis de datos?*
7. *¿Cómo el profesor gestiona una clase de análisis de datos en primaria?*
8. *¿Cómo el profesor salvaguarda el nivel de exigencia cognitiva de la tarea?*
9. *¿Cuáles son las exigencias cognitivas que plantean las tareas asociadas con tablas?*
10. *¿Cuáles son los componentes de una jerarquía de comprensión de tablas?*
11. *Los niveles de comprensión gráfica, ¿son los mismos que para las tablas?*

8. LOS OBJETIVOS DEL TRABAJO DE TESIS

El objetivo general del estudio es relevar la tabla a objeto de aprendizaje en los primeros niveles de escolaridad en Chile.

Como se señalaba, procurar que los ciudadanos adquieran una alfabetización estadística es una cuestión social y didácticamente viva. Esta investigación aborda un aspecto de tal propósito, cual es la tabla de frecuencia que se ocupa en la escuela.

La tabla como representación es diversa en contenidos, formas y aplicaciones. Las tablas son profusamente utilizadas en diversas disciplinas, en especial como herramientas de cálculo y análisis en Estadística y Probabilidad. El marco de Alfabetización Estadística en el cual situamos este trabajo de investigación está a su vez dentro de un gran marco de alfabetización general. En Estadística generalmente se trabaja con tres tipos de tablas: las de frecuencias, las de distribución y las de contingencia. En estadística escolar de primaria se trabaja con la tabla de frecuencia desde su modalidad de tabla de conteo, tabla de frecuencia absoluta, tabla de frecuencia con otros cálculos estadísticos, hasta la tabla de doble entrada que entrega las frecuencias de dos variables en juego. Esta investigación aborda principalmente una de las representaciones estadísticas que se ocupan en la escuela: la tabla de frecuencia en su acepción más elemental.

Considerando una perspectiva didáctica –en tanto disciplina relacionada con el estudio de los procesos de transmisión de los saberes– se quiere estudiar la evolución histórica y epistemológica de la tabla, la conceptualización de la tabla en los sujetos y sus procesos de análisis de datos al tratar con las tablas, como también explorar algunas propuestas de enseñanza respecto a la tabla de frecuencia.

Los objetivos principales de este estudio son:

- 1) Realizar un análisis histórico epistemológico de la tabla identificando sus diversos propósitos en diferentes tiempos y culturas;

- 2) Caracterizar el proceso cognitivo en el análisis de datos cuando se usan tablas de frecuencia;
- 3) Identificar en la gestión del profesor el mantenimiento (o no) de la exigencia cognitiva que plantea una tarea sobre la tabla de frecuencia;
- 4) Configurar niveles de comprensión de la tabla que ayuden a explicar la comprensión de los sujetos enfrentados a la tabla.

Los componentes de naturaleza didáctica y cognitiva se enmarcan en el *Modelo de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico (Statistical Reasoning Learning Environment)* de Garfield y Ben-Zvi, en la teoría de los *Campos Conceptuales* de Vergnaud, en el *Nivel de demanda Cognitiva* de Stein y Smith y en el concepto de *Transnumeración* de Wild y Pfannkuch.

Para el primer objetivo, sobre la componente epistemológica se profundizará en la emergencia del objeto tabla y su rol en el desarrollo del conocimiento a través de un estudio histórico epistemológico. Para el segundo se analizará el funcionamiento representacional de las tablas (Vergnaud, 1990, 1994, 1996, 2007, 2013; Wild & Pfannkuch, 1999) para revelar las tendencias, dificultades y patrones de los sujetos en el proceso de comprensión. Para el tercer objetivo, se considerará el Modelo de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico de Garfield y Ben-Zvi (2007, 2009) y Ben-Zvi (2011) y las demandas cognitivas de Stein y Smith (1998, 2000) considerando comunidades de aprendizaje de profesores en Estudio de Clases. Para el cuarto objetivo, relativo a configurar una jerarquía de niveles de lectura de tablas, se definirán categorías desde el estudio histórico epistemológico y del análisis de ítems de tablas de la prueba TIMSS (2003, 2007 y 2011).

Objetivos Específicos

Ya esbozado el marco teórico, nos proponemos:

A nivel epistemológico relativo a la tabla:

- 1) Mostrar su rol de herramienta desde la *protoestadística* hasta nuestros días.

- 2) Delimitar su rol de elemento significativo en el análisis de la circulación del conocimiento, como repositorio de almacenamiento y a la vez como soporte en la normalización del saber en la antigüedad.
- 3) Evidenciar su presencia en diferentes culturas o sociedades (egipcia, babilónica, griega, maya e inca) en su rol de almacenamiento de archivos administrativos, de archivos de sistema de numeración y de metrología (en las escuelas), y de archivos científicos y matemáticos (en las academias).
- 4) Precisar su rol en el surgimiento y desarrollo del concepto de función (su presentación en arreglos multidimensionales y técnicas de interpolación, como representación de fenómenos continuos).
- 5) Aclarar sus usos y roles en la actividad estadística, relativos a presentar metodológicamente un conjunto de datos o resultados de una investigación, como instrumentos para facilitar los cálculos o como herramientas heurísticas para explorar nuevas situaciones.

A nivel cognitivo relativo a la tabla:

- 6) Identificar las tablas como representaciones que sustentan la construcción de significados de los datos.
- 7) Identificar los procesos en el desarrollo de lectura, interpretación, compleción y construcción de tablas de frecuencias de nivel escolar.
- 8) Delimitar la habilidad de transnumerar los datos para obtener mayor comprensión de los mismos, al cambiar de los datos “en bruto” (*raw*) a la representación tabular.
- 9) Configurar una jerarquía de niveles (taxonomía) de lectura específica para las tablas.
- 10) Determinar si la propuesta de taxonomía de comprensión de tablas se comporta de forma similar a una taxonomía de comprensión de gráficos.

A nivel didáctico (*sensu stricto*) relativo a la tabla:

- 11) Estudiar el lugar de las tablas estadísticas en los Programas de Estudio de Educación Matemática de primaria, en tres países de la OECD⁷.
- 12) Estudiar el lugar de las tablas estadísticas en el Programa de Estudio de Educación Matemática (2012) de primaria del Eje Datos y Probabilidades, en Chile.
- 13) Estudiar el papel de las tablas en pruebas internacionales según la actividad propuesta: de lectura, interpretación, compleción y construcción.
- 14) Elaborar, implementar y analizar una clase que propicie el razonamiento estadístico mediante el análisis de datos y el uso de tablas.
- 15) Elaborar, implementar y analizar una clase centrada en el análisis de datos y el razonamiento estadístico con demandas cognitivas de alto nivel.

⁷ Currículos de países exitosos en pruebas internacionales, y que en su currículo incluyen explícitamente el objeto tabla.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aaboe, A. (1964). *Episodes from the early history of mathematics*. Washington DC, The Mathematical Association of America.
- Annellis, I. (1995). The genesis of the truth-table device. *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*, 24, 55-70.
- Annellis, I. (2012). Peirce's Truth-functional Analysis and the Origin of the Truth Table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1), 87-97. doi 10.1080/01445340.2011.621702
- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), pp. 298-318.
- Arad, Z., Bangteng, X., Chen, G., Cohen, E., Hussam, A., & Muzychuk, M. (2011). *On Normalized Integral Table Algebras (Fusion Rings): Generated by a Faithful Non-real Element of Degree 3*. London, Springer-Verlag.
- Arad, Z. & Blau, H. I. (1991). On table algebras and applications to finite group theory. *Journal of Algebra*, 138, 137-185.
- Arad, Z., Fisman, E. & Muzychuk, M. (1999) "Generalized table algebras" en *Israel Journal Mathematics*, 114, 29-60.
- Araneda, A., del Pino, G., Estrella, S., Icaza, G., & San Martín, E. (2011). *Recomendaciones para el currículo escolar del eje Estadística y Probabilidad*. Recuperado desde <http://www.soche.cl/archivos/Recomendaciones.pdf>
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.R., & Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática y Pesquisa*, 14(2), 279-297.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, J.M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

- Bachelard, G. (1938/1993). *La formación de l'esprit scientifique: contribución à une psychanalyse de la connaissance objetivo*. Paris: Vrin.
- Bachelard, G. (1964/1987). *The Psychoanalysis of Fire*. Trans. A.C.M. Ross. Boston: Beacon Press.
- Baillé J. & Vallerie B. (1993). Quelques obstáculos cognitifs dans la lecture des Représentations Graphiques élémentaires. *Les Sciences de l'Éducation - Pour l'Ère Nouvelle*, 1(3), 221-244.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Ediciones Akal.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Burrill, G. F. & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching Statistics In School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: the 18Th ICMI Study (Vol. 14)*. New ICMI Study Series. Dordrecht: Springer. doi 10.1007/978-94-007-1131-0
- Batanero, C. & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje, en XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Granada, Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.
- Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 127-155. doi 10.1207/S15327833MTL0202_6
- Ben-Zvi, D. & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational studies in mathematics*, 45(1-3), 35-65.
- Ben-Zvi, D. (2002). Seventh grade students' sense making of data and data representations. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Recuperado desde
- Ben-Zvi, D. & Garfield, J. B. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Springer.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 42-63.

- Ben-Zvi, D. & Sharett-Amir, Y. (2005). How do Primary School Students Begin to Reason about Distributions? En K. Makar (Ed.), Reasoning about distribution: A collection of current research studies. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-4)*, University of Auckland, New Zealand.
- Ben-Zvi, D. (2007). Using wiki to promote collaborative learning in statistics education. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1).
- Ben-Zvi, D. (2011). Statistical reasoning learning environment. *EM TEIA/ Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2).
- Bertin, J. & Barbut, M. (1967). *Semiologie graphique: les diagramas, les réseaux, les cartes*. París: Mouton. doi 10.2307/2286122
- Bertoloni, D. (2004). The Role of Numerical Tables in Galileo and Mersenne. *Perspectives on Science*, 12(2), 164-190.
- Blau, H. & Zieschang, P. (2004). Sylow theory for table algebras, fusion rule algebras, and hypergroups. *Journal of Algebra*. 273, 551-570. doi 10.1016/j.jalgebra.2003.09.041
- Bocheński, I.M., (1961). *A History of Formal Logic*. South Bend: University of Notre Dame Press.
- Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*. Second edition. New York: John Wiley & Sons.
- Boyer, C. & Merzbach, U. (2010). *A History of Mathematics*. Third edition. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF. Recuperado desde <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>
- Brizuela, B. M. & Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE*, 21, 37-43.
- Brizuela, B. & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 309-319. doi 10.1016/S0732-3123(02)00076-7
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

- Brousseau, G. (1987). Epistemological obstacle and learning difficulties in Mathematics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 89-104.
- Bruno, A. & Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study (pp. 57-69). Dordrecht: Springer. doi 10.1007/978-94-007-1131-0
- Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. & Robson, E., eds. (2003). En *The History of Mathematical Tables. From Sumer to Spreadsheets*. Oxford University Press: Oxford.
- Cauty, A. & Hoppan, J.M. (2007). *Les Écritures mayas du Nombre*. Disponible en: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/71/33/05/PDF/FDL_CultureMath_proPDF_version_CELIA_bis.pdf
- Cauty, A. (2006). *Les Écritures des Nombres*. CultureMATH, ENS Ulm (eds). Disponible en: http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/html/cauty_nombres/Cauty06_nombres.pdf
- Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education*, 10(3).
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. & Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Statistics Education Journal*, 1(1)
- Chevallard, Y. & Wozniak, F. (2006). Enseigner la statistique en classe de seconde: conditions et contraintes. Recuperado desde http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Enseigner_la_statistique_en_seconde.pdf
- Chevallard, Y. (1991) *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique Grupo Editor S. A.
- Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoirreigné. La Pensée Sauvage: Grenoble.

- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Chick, H. (2003). Transnumeration and the art of data representation. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity*. (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Geelong, pp. 207-214). Sydney: MERGA.
- Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, 167-174.
- Cleveland, W. S. & McGill, R. (1985). Graphical perception and graphical methods for analyzing scientific data. *Science*, 229(4716), 828-833. doi 10.1126/science.229.4716.828
- Conger, A.J. (1980), Integration and generalisation of Kappas for multiple raters, *Psychological Bulletin*, 88, 322-328.
- Conti, K. C. & Carvalho, D. L. (2011). O Letramento Presente na Construção de Tabelas por Alunos da Educação de Jovens e Adultos. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 24(40), 637-658.
- Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Cook, A.R. & Teo, S.W.L. (2011) The Communicability of Graphical Alternatives to Tabular Displays of Statistical Simulation Studies. *PLoS ONE*, 6(11): e27974. doi:10.1371/journal.pone.0027974
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and instruction*, 9(4), 343-363.
- Coutanson, B. (2010). La question de l'éducation statistique et de la formation de l'esprit statistique à l'école primaire en France. Étude exploratoire de quelques caractéristiques de situations inductrices d'un enseignement de la statistique au cycle III. Dissertation doctoral. Université de Lyon, Francia.
- Croarken, M., & Campbell-Kelly, M. (2000). Beautiful numbers: the rise and decline of the British Association Mathematical Tables Committee, 1871-1965. *Annals of the History of Computing, IEEE*, 22(4), 44-61.

- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for research in mathematics education*, 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- De la Vega, G. (1609). *Comentarios reales de los Incas* (Vol. 1). Recuperado desde <http://shemer.mslib.huji.ac.il/lib/W/ebooks/001531300.pdf>
- del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.
- DEO (2008). Oklahoma School Testing Program. Ítems Specification Mathematics, Grade 5. Recuperado desde <http://arch-alca.s3.amazonaws.com/alca/v3/gsacket/g/eej9BXnJjJ.pdf>
- Denzin, N.K. (1997). Triangulation in educational research. In Keeves, J.P. (Ed). *Educational research, methodology, and measurement. An international handbook*. Segunda Edición. Oxford: Pergamon Press. p. 318-322.
- Dewdney, A. K. (1993). *200% of Nothing: An Eye Opening Tour Through the Twists and Turns of Math Abuse and Innumeracy*. New York: John Wiley, Inc.
- Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *SUMA*, 48, 45-50.
- Dibble, E. (1997), *The Interpretation of Tables and Graphs*, Seattle, WA: University of Washington.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7/2, 5-31.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizajes*.
- Duval, R. (2003). Comment Analyser le Fonctionnement Representationnel des Tableaux et leur Diversité? *Spirale - Revue de Recherches en Éducation* -, 32, 7-31.
Recuperado en junio 2010 desde http://spirale-edu-revue.fr/IMG/pdf/1_Duval_Spi32F.pdf
- Ehrenberg, A.S.C. (1977). Rudiments of Numeracy. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 140(3), 277-297. doi:10.2307/2344922.
- Ehrenberg, A.S.C. (1978). Graphs or Tables. *The Statistician*, 27(2), 87-96.

- Ehrenberg, A.S.C. (1986). Reading a Table: An Example. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 35(3), 237-244.
- Ehrenberg, A. S. C. (1998). Making Data User-Friendly. *Marketing Learning 2, The R&D Initiative*, South Bank University, London.
- Embley, D.W., Hurst, M., Lopresti, D. & Nagy, G. (2006). Table Processing Paradigms: A Research Survey. *Int. J. Doc. Anal. Recognit.*, 8(2-3), 66–86.
- Espinel, M.C., & Antequera, A.T. (2009). Un estudio sobre la competencia de los alumnos en el manejo de tablas para resolver situaciones cotidianas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 227-236). Santander: SEIEM.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 99-119.
- Espinel, C., Bruno, A. & Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.
- Estepa, A. & Gea. M. (2011). Conocimiento Para La Enseñanza De La Asociación Estadística. Capítulo 2 en *Investigaciones Actuales en Educación Estadística y Formación de Profesores*, pp. 23-40.
- Estrada, A. & Díaz, C. (2006). Errores en el Cálculo de Probabilidades en Tablas de Doble Entrada en Profesores en Formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 48-57. Recuperado en abril 2010, desde <http://web.udl.es/usuarios/z4084849/docs/uno44.pdf>
- Estrella, S. (2010). *Instrumento para la evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en profesores de Educación Básica*. (Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática no publicada), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Estrella, S. & Mena-Lorca, A. (2012). Estudio exploratorio de las tablas en el currículo de primer ciclo básico, eje Datos y Probabilidades. *Ponencia en XV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, Universidad Católica de Temuco.
- Estrella, S. (2013). El Formato Tabular: Una Revisión de Literatura. (sometido)

- Estrella, S. & Mena-Lorca, A. (2013). Hacia una Epistemología de las Tablas en Matemáticas.
- Estrella, S. & Mena-Lorca, A. (2013b). Vergnaud's Theory Applied to Statistical Representations of Primary Students. En *ICER13: The 6th International Conference on Educational Research: Challenging Education for Future Change*. Faculty of Education, Khon Kaen University: Tailandia. ISBN: 978-616-223-307-
- Estrella, S., Mena-Lorca, A., & Olfos, R. (2014). Desarrollo de una Taxonomía Tabular. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. Editorial: CLAME A.C. (por aparecer).
- Estrella, S. & Olfos, R. (2012). La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado. *Revista Mexicana de Educación Matemática*, 24(2), 123-133.
- Estrella, S. & Olfos, R. (2013). Estudio de Clases para el mejoramiento de la enseñanza de la Estadística en Chile. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*. (pp. 167 – 192). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8.
- Euler, L. (1748/1988) *Introduction to Analysis of the Infinite*. Book I. Berlin, Birkhäuser
- Feinberg, R.A. & Wainer, H. (2011). Extracting sunbeams from cucumbers. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(4), 793-810.
- Few, S. (2004). *Show me the numbers. Designing Tables and Graphs to Enlighten*. Oakland: Analytics Press.
- Fleiss, J.L. (2000). *Statistical methods for rates and proportions*. New York: Wiley.
- Fox, D.J. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: EUNSA.
- Friberg, J. (2007). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts. Manuscripts in the Schøyen Collection: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. New York, Springer.
- Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

- Friendly, M. (2009). *Milestones in the history of thematic cartography, statistical graphics, and data visualization*. National Sciences and Engineering Research Council. Canada: Grant OGP0138748.
- Furusawa, H. & Kahl, W. (2004) *Table algebras: Algebraic structures for tabular notation, including nested headers*. Programming Science Technical Report, Research Center for Verification and Semantics, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST).
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. & Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, 22(2), 183-197.
- Gardner, M., (2012) *Akhmim Wooden Tablet*. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. Disponible en: <http://mathworld.wolfram.com/AkhmimWoodenTablet.html>
- Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3).
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2005). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: Issues, challenges, and implications. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 397-409). Springer Netherlands.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372-396.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.

- Garrow, J.S. & Webster, J. (1984). Quetelet's index (W/H²) as a measure of fatness. *International journal of obesity*, 9(2), 147-153.
- Gelman, A., Pasarica, C. & Dodhia, R. (2002). Statistical Computing and Graphics. Let's Practice What We Preach: Turning Tables into Graphs. *The American Statistician*, 56(2).
- Gelman, A. (2011). But Why Tables are Really Much Better than Graphs? *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(1) 3-7. DOI: 10.1198/jcgs.2011.09166.
- Glaisher J.W.L. (1873). *Report on Mathematical Tables. Report of the British Assoc. for the Advancement of Science*, pp. 1-176. Recuperado desde: <https://archive.org/details/cu31924001918857>
- Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literatura. *Studies in Science Education*, 47(2), 183-210.
- González, F., Martín-Loeches, M., & Silván, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, 30, 167-195.
- Goody, J. (1976). Civilisation de l'écriture et classification ou l'art de jouer sur les tableaux. *Actes de la Recherche en Sciences Sociales*, 1, 87-101.
- Goody, J. (1977). *La domesticación del pensamiento salvaje*. Madrid, Ediciones Akal.
- Guaman Poma de Aiala, F. (1615). *Primer nueva corónica i buen gobierno*. Recuperado desde <http://www.kb.dk/permalink/2006/poma/titlepage/es/text/?open=&imagesize=XL>
- Gutiérrez, C. & Flavio Gutiérrez, F. (2000). Ramón Picarte, la proeza de hacer matemáticas en Chile. QUIPU, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 13(3), 307-342.
- Hallo, W.W. (1964). The Road to Emar. *Journal of Cuneiform Studies*, 18(3), 57-88.
- Hur, I., Kim, S. H., Samak, A., & Yi, J. S. (2013). A Comparative Study of Three Sorting Techniques in Performing Cognitive Tasks on a Tabular Representation. *International Journal of Human-Computer Interaction*, 29(6), 379-390.

- Hurst, M. (2000). *The Interpretation of Tables in Texts*. Unpublished doctoral thesis, University of Edinburgh. School of Cognitive Science, Informatics, University of Edinburgh.
- Inglaterra. (1999). *The National Curriculum for England, Mathematics*. Recuperado desde <https://www.education.gov.uk/publications/eOrderingDownload/QCA-99-460.pdf>
- Inglaterra. (2011). *The National Curriculum for England, Mathematics*. Recuperados desde <https://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/primary/b00199044/mathematics/attainment/ma4>
- Janicki, R. (2001). On a formal semantics of tabular expressions. *Science of Computer Programming*, 39(2), 189-213.
- Janvier, C. (1987). *Translation process in mathematics education*. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Joseph, G.G. (2011). *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.
- Kaput, J. (1991). *Notations and representations as mediators of constructive processes*. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht.
- Kastellec, J. P. & Leoni, E. (2007). Using graphs instead of tables in political science. *Perspectives on Politics*, 5(4), 755-771.
- Kendall, M. G. (1970). Where shall the history of statistics begin? En E. S. Pearson & M. G. Kendall (Eds.), *Studies in the history of statistics and probability* (pp. 45-46). London: Charles Griffen.
- Kemp, M. & Kissane, B. (2010). A Five Step Framework For Interpreting Tables And Graphs In Their Contexts. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php [© 2010 ISI/IASE]
- Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 259-289.

- Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician*, 59(1), 31-40.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Piados Comunicación.
- Landeta, J.L. (2006). Current validity of the Delphi method in social sciences. *Technological forecasting and social change*, 73(5), 467-482.
- Landeta, J. L. (1999). El método Delphi: una técnica de previsión para la incertidumbre. Barcelona: Ariel.
- Landis, J.R & Koch, G.G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33, 159-174.
- Lardner, D. (1834). Babbage's Calculating Engine. *Edinburgh Review*, 120, 263-327.
- Lehrer, R. & Schauble, L. (2000). Inventing data structures for representational purposes: Elementary grade students' classification models. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 51-74.
- Maier, D. (1983). *The Theory of Relational Databases*. Maryland: Computer Science Press.
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.
- Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam: Sense Publishers.
- Martí, E., García-Mila, M., Gabucio, F. & Konstantinidou, K. (2010a). The construction of a double-entry table: a study of primary and secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education*, 26(2), 215-234.
- Martí, E., Pérez, E. & de la Cerda, C. (2010b). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos*, Años IX y X. No 10.
- Martínez, M. & Brizuela, B. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 285-298.
- Mena-Lorca, A. (2004). *Elementos de Matemáticas*. Valparaíso: Instituto de Matemática Pontificia, Universidad Católica de Valparaíso.
- Merzbach, U. (1977). Georg Scheutz and the First Printing Calculator. *Smithsonian Studies in History and Technology*, 36. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10088/2435>

- Meyer, J., Shamo, M. K. & Gopher, D. (1999). Information structure and the relative efficacy of tables and graphs. *Human Factors*, 41, 570–587.
- Ministerio de Educación. (2009). *Propuesta ajuste curricular. Objetivo fundamentales y contenidos mínimos obligatorios. Matemática*. Santiago de Chile: LOM Ediciones.
- Ministerio de Educación. (2012). *Estándares orientadores para carreras de Educación Parvularia: Estándares pedagógicos- Estándares Disciplinarios*. Santiago de Chile: LOM Ediciones.
- Ministerio de Educación. (2012). *Bases Curriculares 2012. Matemática Educación Básica*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). Boletín oficial del Estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria. Madrid, España.
- National Curriculum (1999). The National Curriculum for England, Mathematics.
- National Curriculum (2013). Mathematics programmes of study: key stages 1 and 2 . National curriculum in England. Recuperado desde https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239129/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf
- Neugebauer, O. & H. B. Van Hoesen, (1959) “Greek Horoscopes” en *Memoirs of the American Philosophical Society*. Maryland, J.J: Furst Company.
- Nisbet, S. (1998). *Displaying statistical data*. Paper presented at the annual conference of the Queensland Association of Mathematics Teachers, Gold Coast, Australia.
- Nisbet, S. (2003). Getting Organised: The Role of Data Organisation in Students' Representation of Numerical Data. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3.
- Nisbet, S., Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., & Mooney, E. (2003). Children's Representation and Organisation of Data. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 42-58.
- Parnas, D.L., Asmis, G.J.K., & J. Madey, (1991). Assessment of safety-critical software in nuclear power plants. *Nuclear Safety*, 32(2), 189-198.
- Pedersen, O. (1974). Logistics and theory of function: An essay in the history of Greek mathematics. *Archive International d'Histoire des Sciences*, 24(94), 29-50.

- Pearson, K. (1904). On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation Draper's Co. Res. Mem. Biometric Ser. 1
- Pearson, K. (1904). *On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation; On the general theory of skew correlation and non-linear regression*. Cambridge: Cambridge University Press. Recuperado desde <http://ia600408.us.archive.org/18/items/cu31924003064833/cu31924003064833.pdf>
- Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Revista de investigación y experiencias didácticas, Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 121-134.
- Peirce, C.S. (1931-1958) *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne & P. Weiss, Eds.) Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1901). On the logic of drawing history from ancient documents, especially from testimonies. *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings, (1893–1913)*. Edited by the Peirce Edition Project. Volume, 2, 75-114.
- Peirce, C. S. (1903). "Tres tipos de razonamiento" (*Lecciones de Harvard sobre el pragmatismo*, Lección VI), Traducción castellana y notas de José Vericat. En: *Charles S. Peirce. El hombre, un signo (El pragmatismo de Peirce)*, J. Vericat (tr., intr. y notas), Crítica, Barcelona, 1988, pp. 123-141. "On Three Types of Reasoning" corresponde a CP 5. 151-179.
- Peirce, C.S. (1931). Division of signs. En Hartshorne, C. y P. Weiss (ed.), *Collected Papers in Elements of Logic*, vol. II Chap. 2. Harvard, University Press.
- Peralta, J. X. P. (2002). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. Reporte de Tesis, Memoria de Semana de la Matemática, Universidad de Sonora (pp. 166-173). En <http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/portada.htm>
- Pérez-Echeverría, M. & Scheuer, N. (2009). External Representations as Learning Tools: An Introduction. En Andersen, C., Scheuer, N., Pérez-Echeverría, M. y Teubal, E. *Representational systems and practices as learning tools*. (pp. 1-17). Rotterdam: Sense Publishers.

- Pfannkuch, M. & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, 1(2), 4–21.
- Pfannkuch, M. & Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. En *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 323-333). Springer Netherlands.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Netherlands: Springer.
- Pfannkuch, M., Wild, C. J., & Regan, M. (2014). Students' difficulties in practicing computer-supported statistical inference: Some hypothetical generalizations from a study. En *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen—Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 393-403). Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.
- Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science*. New York: Columbia University Press.
- Proust, C. (2005). Le calcul sexagésimal en Mésopotamie. Recuperado desde http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/pdf/Calcul%20sexa_Proust.pdf
- Proust, C. (2008). Quantifier et calculer: usages des nombres a Nippur," *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14,1-47.
- Proust, C. (2009). Numerical and Metrological Graphemes: From Cuneiform to Transliteration1. *Cuneiform Digital Library Journal*, 1.
- Proust, C. (2010). Mesopotamian metrological lists and tables: Forgotten sources. En Bretelle-Establet, F. (ed.), *Looking at it from Asia: The Processes that Shaped the Sources of History of Science*. New York: Springer.
- Quetelet, A. (1835). Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale, Bachelier: Paris. Recuperado desde <https://archive.org/stream/surlhommeetled00quet#page/n5/mode/2up>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains* (pp. p-248). Paris: Armand Colin.

- Rashed, R. (2003). History of Science and Diversity at the Beginning of the 21st Century. *Proceedings of the XXI International Congress of History of Science*. vol. I, Ciudad de México: UNAM, Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia y la Tecnología, pp. 15-29.
- Resnick, M. L. & Fares, C. (2004). Visualizations to facilitate online tabular presentation of product data. In *Proceedings of the Human Factors and Ergonomics Society Annual Meeting* (Vol. 48, No. 13, pp. 1498-1502). SAGE Publications.
- Rivadulla, A. (1991). Apriorismo y base empírica en los orígenes de la estadística matemática. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 14(26), 187-220.
- Robson, E. (2001). The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur. *Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale*, 93(1), 39-66.
- Robson, E. (2003). Tables and tabular formatting in Sumer, Babylonia, and Assyria, 2500-50 BCE. En M. Campbell-Kelly, M. Croarken, R.G. Flood, y E. Robson (ed.), *The History of Mathematical Tables from Sumer to Spreadsheets*. Oxford: University Press.
- Roegel, D. (2010). A reconstruction of the tables of Briggs and Gellibrand's Trigonometria Britannica (1633). En The LOCOMAT Project: Recomputing Mathematical and Astronomical Tables. Technical report, LORIA, Nancy.
- Roegel, D. (2011) The great logarithmic and trigonometric tables of the French Cadastre: a preliminary investigation. Recuperado desde <http://locomat.loria.fr/cadastre/analysis.pdf>
- Ross, M. (2011). Survey of Graphical and Numerical Tables in Egypt. *Oberwolfach Reports*, 12, 650–652.
- Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 6-13.
- Russell, S. J. (1991). Counting noses and scary things: Children construct their ideas about data. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 158–164). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

- Sanz Lerma, I. (2001). Construcción del lenguaje matemático. Cuadros y tablas. *Endoxa*, (14), 199-226.
- Schiold, M. (2000). Alfabetización estadística: las dificultades para describir y comparar las tasas y porcentajes. En *ASA Actas de la Sección de Educación Estadística* (p. 176).
- Schiold, M. (2001). Statistical Literacy: Reading Tables of Rates and Percentages. En *ASA Proceedings of Statistical Education Section*.
- Schiold, M. (2006). Statistical literacy survey results: Reading graphs and tables of rates and percentages. Conference of the International Association for Social Science Information Service and Technology (IASSIST).
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning - epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 79–104.
- Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th–19th century France and Germany*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer.
- Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. *Agir ensemble: Eléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*, 13-49. PU Rennes.
- Sidoli, N. (2009). *The function of mathematical tables in Ptolemy's Almagest*. Disponible en: http://individual.utoronto.ca/acephalous/Budapest_09_07_small.pdf
- Sidoli, N. (2011). Mathematical Tables in Ptolemy's Almagest. Milestones for a historical research Project, paper presentado en Mini-Workshop: History of Numerical and Graphical Tables.

- Singapur. (2007). Ministry of Education, Singapur. *Mathematics Syllabus Primary*. Recuperado desde <http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2007.pdf>
- Solano-Flores, G., Contreras-Niño, L. A., & Backhoff-Escudero, E. (2006). Traducción y adaptación de pruebas: Lecciones aprendidas y recomendaciones para países participantes en TIMSS, PISA y otras comparaciones internacionales. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 8(2).
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Segunda Edición. Madrid: Morata.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematics tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). Implementing standards-based mathematics instruction (pp. 1– 33). NY: Teachers College Press.
- Stigler, S. (2002). The missing early history of contingency tables. En *Annales-Faculte Des Sciences Toulouse Mathematiques, Université Paul Sabatier*, 11(4), 563-573.
- Sugio, T., Shimojima, A., & Katagiri, Y. (2012). Psychological evidence of mental segmentation in table reading. En *Diagrammatic Representation and Inference* (pp. 124-131). Springer Berlin Heidelberg.
- Sureda, P. & Otero, M. R. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 6(1), 124-138.
- Tauber, L. Comparative Study on Teaching Statistics In Mathematics and Non Mathematics Colleges in Santa Fe (Argentina). *Statistics (or Statistics I)*, 6(8), 4.
- Tauber, L., Cravero, M., & Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*

- (pp. 273-283). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.
- Thioulouse, J. (2011). Simultaneous analysis of a sequence of paired ecological tables: A comparison of several methods. *The Annals of Applied Statistics*, 5(4), 2300-2325.
- Tijerino, Y., Embley, D., Lonsdale, D., & Nagy, G. (2005). Towards ontology generation from tables. *World Wide Web: Internet and Web Information Systems*, 8, 261–285.
- TIMSS (2003). International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College. Recuperado desde TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, timss.org.
- TIMSS (2007). International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College. Recuperado desde TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, timss.org.
- TIMSS (2011). International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. Chestnut Hill, MA: Boston College. Recuperado desde TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, timss.org.
- Tournès, D. (2000). Pour une histoire du calcul graphique. *Revue d'histoire des mathématiques*. 6, 127-161.
- Tournès, D. (2011). What is a numerical table? Milestones for a historical research Project, paper presentado en Mini-Workshop: *History of Numerical and Graphical Tables*.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 137-162). Springer US.
- Tufte, E. & Graves-Morris, P. (1983). *The visual display of quantitative information* (Vol. 31). Cheshire, CT: Graphics press.
- Tufte, E. (1990). *Envisioning information*. Cheshire, CT: Graphics Press.
- Tufte, E. (2006). *Beautiful evidence* (Vol. 23). Cheshire, CT: Graphics Press.
- Tukey, J. W. (1977). Exploratory data analysis. MA: *Reading*.

- Van Belle, G. (2011). *Statistical rules of thumb* (Vol. 699). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.
- Vergnaud, G. (1994) (coord.): *Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* Buenos Aires: Edicial.
- Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica, en *Revista Perspectivas*, Vol. XXVI, N° 1.
- Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. *Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*. ISBN 978-950-658-183-1.
- Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la theorie des champs conceptuels? Por qué la teoría de los campos conceptuales? *Infancia y Aprendizaje*, 36(2), 131-161. Tandil.
- Vigotsky, L. S. & Luria, A. (1994). Tool and Symbol in child development'. En Valsiner, J. y van der Veer, R. (Eds.), *The Vigotsky reader*, pp. 99-175. Oxford: Blackwell. Recuperado desde <http://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1934/tool-symbol.htm>
- Wainer, H. (1992). Understanding Graph and Tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14-23.
- Wang, X. (1996). *Tabular Abstraction, Editing, and Formatting*. Unpublished Dissertation doctoral, Universidad de Waterloo, Canadá.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: the role of language. *Trends in Cognitive Sciences*, 7(9), 385-390.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248.
- Wirth, U. (1998). El razonamiento abductivo en la interpretación según Peirce y Davidson. *Analogía filosófica*, 12(1), 113-123.
- Wu, H. & Krajcik, J. (2006). Inscriptural Practices in Two Inquiry-Based Classrooms: A Case Study of Seventh Graders' Use of Data Tables and Graphs. *Journal of Research in Science Teaching*, 43(1), 63–95.

- Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.
- Youschkevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37-85.
- Zanibbi, R., Blostein, D., & Cordy, J. R. (2003). A survey of table recognition. *Document Analysis and Recognition*, 7(1), 1-16.

LISTA DE TABLAS

Tabla 1	<i>Guía de Análisis de la Tarea (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000)</i>
Tabla 2	<i>Factores asociados con la mantención o declinación de demandas cognitivas de nivel alto (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000).....</i>
Tabla 3	<i>Procesos cognitivos entre representaciones (adaptada de Janvier, 1987).....</i>
Tabla 4	<i>Marco de técnicas trasnumerativas (Chick, 2004)</i>
Tabla 5	<i>Distribución de las tablets encontradas en Nippur según los textos contenidos en ellas.</i>
Tabla 6	<i>Resumen de Objetivos de Aprendizaje del eje Datos y Probabilidades, Grados 1-6 (Bases Curriculares, 2012).....</i>
Tabla 7	<i>Actividades solicitadas en las Bases (2012) para Tablas y Gráficos en eje Datos y Probabilidades</i>
Tabla 8	<i>Actividades con las representaciones según el grado escolar (de 1° a 6°)</i>
Tabla 9	<i>Desempeño en las Prueba TIMSS-2011 de Chile (grados 4 y 8) respecto al promedio según Áreas de Contenido</i>
Tabla 10	<i>Desempeño en las Prueba TIMSS-2011 de Chile (grados 4 y 8) respecto al promedio según Dominio Cognitivo</i>
Tabla 11	<i>12 ítems TIMSS y sus características.....</i>
Tabla 12	<i>Rol del sujeto según la finalidad de la tarea en torno a las tablas...</i>
Tabla 13	<i>Ejemplos de producciones que evidencian técnicas de trasnumeración en la situación Colaciones de grado 3.</i>
Tabla 14	<i>Factores asociados con la mantención o declinación de demandas cognitivas de nivel alto (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000).....</i>
Tabla 15	<i>Caracterización de un segmento representativo de segunda clase en cuanto a factores asociados</i>

con la mantención (M) o declinación (D) de demandas cognitivas de nivel alto ..

Tabla 16

Frecuencia de aparición de las demandas cognitivas de la clase completa según investigador, consenso entre dos investigadores y juez externo.

Tabla 17

Vínculos entre tipos de lectura y la finalidad y nivel cognitivo de las tareas referidas a las tablas.

Tabla 18

Taxonomía de comprensión de tabla

Tabla 19

Análisis de varianza de medidas repetidas

Tabla 20

Resúmenes estadísticos de las calificaciones ordinales dadas a los ítems

Tabla 21

Índices de acuerdo Kappa para calificaciones a nivel ordinal.....

Tabla 22

Descriptivos de las calificaciones dicotómicas dadas a los ítems

Tabla 23

Índices de acuerdo Jaccard y Kappa para calificaciones a nivel dicotómico..

Tabla 24

Contraste estadístico para índice Kappa

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.* Características del Pensamiento Estadístico
- Figura 2.* La transnumeración de Wild y Pfannkuch (1999) y la propuesta de Chick (2004). .
- Figura 3.* Seis elementos claves del Ambiente de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico (SRLE) e ideas estadísticas fundamentales.
- Figura 4.* Cinco componentes fundamentales para la educación de profesores (Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011: 25).
- Figura 5.* Fases del Estudio de Clases.....
- Figura 6.* Referentes teóricos asumidos en el sistema didáctico a investigar. ..
- Figura 7.* Hueso de Lebombo (cueva Border, montañas de Lebombo, entre Sudáfrica y Swazilandia)
- Figura 8.* Varilla de Gorge d'Enfer (Dordogne, Francia).
- Figura 9.* Hueso de lobo (Dolni Vestonice, Moravia, República Checa).
- definido.**
- Figura 10.* Hueso de Ishango (frontera entre Congo y Uganda).
- Figura 11.* Asta de reno (Brassempouy, Francia).
- Figura 12.* Tablet Tartaria (Cluj-Napoca, Rumania).
- Figura 13.* Tablet de Dispilio (Kastoria, Macedonia, Grecia).
- Figura 14.* Tabla de inversos neo-sumeria de la ciudad de Nippur, fines de 3000 a. C.
- Figura 15.* Tablets sin formato de tablas (2050 a. C.) y con formato de tablas (2028, a. C.). ..
- Figura 16.* Tabla de Shuruppag, frente y reverso. (Vorderasiatisches Museum, Berlin).....
- Figura 17.* Plimpton 322.....
- Figura 18.* Tablets Stobart.
- Figura 19.* Códice maya.....
- Figura 20.* Secretario-Contador y Administrador de Provincias (Guaman Poma, 1615, p. 348 y 358).
- Figura 21.* Administrador del Depósito del Inca, y Contador Mayor y Tesorero con *quipu* y *yupana* (Guaman Poma, 1615, p. 335 y 360).....
- Figura 22.* Tablas astronómicas desde el Almagesto de Ptolomeo (traducción árabe de Ishâq b. Hunayn (830-910), revisada por Thâbit b. Qurra (836-901). Copiada por Ibrâhîm ibn Muhammad al-Sharfî, Maghreb en España, 1221. Manuscrito sobre papel (131 hojas, 25,5 x 18,5 cm).
- Figura 23.* Extracto de una tabla del Almagesto de Ptolomeo (edición latina, Venecia, 1515).;
- Figura 24.* Tablas astronómicas construidas de acuerdo con el sistema de Ptolomeo.
- Figura 25.* Un extracto de una tabla de logaritmos publicado por Legendre (1826, Tabla V, página 260). Hay más de 20 errores en esta tabla construida para 120 números, sobre todo en el último dígito. (Imagen obtenida desde Roetgen, 2011).

<i>Figura 26.</i> Tablas de Ramón Picarte descritas en Reporte de la Ciencia Británica, 1873, pp. 176.
<i>Figura 27.</i> Tablas del chileno Ramón Picarte aprobadas por la Academia de Ciencias de París en 1859.
<i>Figura 28.</i> Ábaco de Lalanne, con instrucciones para sus uso (1843).
<i>Figura 29.</i> Tabla genérica
<i>Figura 30.</i> Elementos lógicos de una tabla.
<i>Figura 31.</i> Ejemplo de tabla
<i>Figura 32.</i> Concatenación de tablas.
<i>Figura 33.</i> Aspectos de la estructura de la tabla.
<i>Figura 34.</i> Diferenciación de algunos de los componentes de la tabla (de doble entrada).
<i>Figura 35.</i> Estructura lógica de la tabla.
<i>Figura 36.</i> Estructura semántica de la tabla.
<i>Figura 37.</i> Modelos genéricos de Tabla según estructura física y de contenido.
<i>Figura 38.</i> Tabla T_f con sus encabezados y cuerpo de datos, como resultados de concatenación.
<i>Figura 39.</i> Proceso de concatenación de dos subtablas, $T_{f.a}$ y $T_{f.b}$
<i>Figura 40.</i> Proceso de concatenación
<i>Figura 41.</i> Proceso de concatenaciones sucesivas
<i>Figura 42.</i> Expresión tabular como resultados del proceso de concatenaciones.
<i>Figura 43.</i> Expresión tabular como resultados del proceso de concatenaciones.
<i>Figura 44.</i> Listas y Tablas según dimensiones.
<i>Figura 45.</i> Estructura de una Tabla de 2x2
<i>Figura 46.</i> Algunas culturas donde se desarrolló matemática, Joshep (2011)..
<i>Figura 47.</i> Simulación de ejercicio de cálculo de superficie (modificado desde Proust, 2009, p. 38).
<i>Figura 48.</i> Actividades exigidas en los Objetivos de Aprendizaje referidas a Tablas y a Gráficos (Elaboración propia según información contenida en las Bases, MINEDUC, 2012)
<i>Figura 49.</i> Ítem de tabla tipo pictograma, nivel Intermedio TIMSS (2011).
<i>Figura 50.</i> Ítem de tabla a gráfico, nivel Bajo, TIMSS (2011).
<i>Figura 51.</i> Ítem de tabla de dos por dos, nivel Intermedio, TIMSS (2007).
<i>Figura 52.</i> Ítem dos tablas, nivel Alto, TIMSS (2007).
<i>Figura 53.</i> Ítem completar tabla de conteo, nivel Avanzado, TIMSS (2007)...
<i>Figura 54.</i> Ítem dos gráficos, nivel Sobrevanzado, TIMSS (2007)..

- Figura 55.* Marco de la comprensión de una tabla estadística (Estrella, Mena & Olfos, 2014).
- Figura 56.* Diseño metodológico de Estudio 1..... *Figura 57.* Lámina que muestra la colación preferida llevada a la escuela por un grupo curso de grado 3
- Figura 58.* Diseño metodológico del Estudio 2.
- Figura 59.* Recogida de datos en el diseño e implementación de la clase
- Figura 60.* Representaciones producidas por tres alumnos, de izquierda a derecha: tabla con datos y conteo; tabla con íconos y conteo; y pictograma.
- Figura 61.* Tabla de una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y sin conteo.
- Figura 62.* Tabla de una variable y sus categorías, con datos representados a través de texto y sin conteo.
- Figura 63.* Tabla gráfica de una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y sin conteo.
- Figura 64.* Tabla de una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y con conteo.
- Figura 65.* Tabla de una variable y sus categorías, con datos representados a través de texto y con conteo.
- Figura 66.* Diseño metodológico de Estudio 3.....
- Figura 67.* Diseño metodológico de Estudio 4.....
- Figura 68.* Modelos genéricos de Tabla según estructura física y de contenido.

ANEXOS

Anexos Capítulo III

Anexo III.1. Algunos hitos importantes de las tablas y sus posibles funcionalidades

Anexos Capítulo IV

Anexo IV.1. Descripciones de los ítems según nivel de referencia en TIMSS 2007

Anexo IV.2. Características de 12 ítems referidos a tablas de la prueba Internacional TIMSS

Anexos Capítulo 5

Anexo V.1. Protocolo de categorización de listas, seudotablas y tablas.

Anexo V.2. Producciones tipo listas de los alumnos y alumnas de grado 3 en la clase estadística

Anexo V.3. Plan de Clases: Colaciones

Anexo V.4. Resumen cuantitativo de la categorización de clase C, dos Jueces y dos Investigadores

Anexo V.5. Evaluaciones de dos Jueces y dos Investigadores

Anexo V.6. Registros de las producciones de los alumnos de grado 3 de la Profesora C

Anexo V.7. Comparativo de Demandas Cognitivas de clases “Colaciones”, implementación 1 y 2

Anexo V.8. Demandas Cognitivas de clases “Colaciones” sobre las transcripciones de la implementación 1 y 2, según dos jueces

Anexo V.9. Registro de Análisis de Ítems TIMSS para levantamiento de categorías

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas



THE TABLE OBJECT:

AN EPISTEMOLOGICAL, COGNITIVE AND DIDACTIC STUDY

Doctorate Program in Didactics of Mathematics

María Soledad Estrella Romero

Director de Tesis interno: Dr. Arturo Mena-Lorca

Director de Tesis externo: Ph.D. Dani Ben-Zvi

Año 2014

Valparaíso, Chile

TABLE OF CONTENTS

FOREWARD

SUMMARY

CHAPTER I. STUDY FOUNDATIONS

1

Chapter Summary

1. Introduction

2. Issues this dissertation addresses

Social demands for including statistics in schools

3. Current status of tables in the Chilean curriculum

4. Issues that define the evolution of the dissertation

Expertise of the author that enriches the study

Potential of the table for handling data

The definition of a table and its use in school

5. Results of research on statistical representations

Studies of tables and graphs in the context of statistical literacy

Status of the understanding of tabular representations

6. Issues raised by the inclusion of statistics in the curriculum

7. Research questions

8. Goals of the dissertation

Specific goals

CHAPTER II. LITERATURE REVIEW AND THEORETICAL FRAMEWORK

17

Chapter Summary

1. Introduction

2. Difficulties with the tabular format

2.1. Cognitive requirements in relation to the reading of a table

2.2. Consequences for the way of teaching and learning

3. Cognitive Approach

- 3.1. The learner's perspective: Vergnaud's Theory of Conceptual Fields
- 3.2. The teacher's perspective: Stein and Smith's Mathematical Task Analysis
- 3.3. Statistical Thinking and Statistical Reasoning
 - 3.3.1 Wild and Pfannkuch's *Transnumeration*
- 3.4. Fundamental Statistical Ideas
- 4. Didactic Approach
 - 4.1. A model of Statistical Education
 - 4.1.1 Garfield and Ben-Zvi's Statistical Reasoning Learning Environment
 - 4.2. Lesson Study
- 5. Chapter Summary

CHAPTER III. TOWARDS A EPISTEMOLOGY TABLES

45

Chapter Summary

- 1. Introduction
- 2. General notion of table
- 3. Tables and ancient notion of number
 - 3.1. Prehistoric Tables: characteristics and appearance of numbers
 - 3.2. Mesopotamian Tables: quantifiers, measures and numbers
 - 3.3. Egyptian Tables: fractions and astronomy
 - 3.4. Maya Tables: calendar and numbers
 - 3.5. Andean cultures: *Quipu*
- 4. Tables and concept of function
 - 4.1. Function concept
 - 4.2. Tables and functions in Mesopotamia
 - 4.3. Hellas: interpolation and infinitesimal

- 4.4. Tables and astronomy in post medieval Europe
- 4.5. Tables and expeditious calculations
 - 4.5.1. Expeditious calculations: Ramón Picarte
- 4.6. Diverse aims of the use of Tables
- 4.7. The Tables and the formal concept of function
- 5. Mathematical Tables
 - 5.1. Description of a Table
 - 5.2. Operations with Tables
 - 5.3. Algebraic structure
 - 5.3.1. Associative algebra
 - 5.3.2. Algebra - table
 - 5.3.3. Applications
- 6. Peirce: Tables and thought
 - 6.1. Logic Tables
 - 6.2. Abductive thinking
- 7. Conclusions of Chapter
 - 7.1. Reflections

CHAPTER IV. TOWARDS A DIDACTICS OF TABLES

87

Introduction

- 1. Table in Informatics
 - 1.1. Introduction
 - 1.2. Tabular structures: physical, functional, semantic and logical
 - 1.3. Tables on the web
 - 1.4. Generic model for the Table
 - 1.5. Concatenation of Tables in a school textbook

2. Table in Statistics

2.1. Introduction

2.2. A brief history of Tables in Statistics

2.3. Notion of statistical Table

2.4. Some criteria to build statistical Tables

2.4.1. Other criteria for displaying Tables

2.4.2. Other considerations for displaying data

2.4.3. Relevant remarks to build Tables

2.4.4. Relevant remarks to interpret Tables

2.4.5. General Considerations

2.5. Tables in Statistics Education

3. Tables in the school curriculum

3.1. Introduction

3.2. School curriculum in Mesopotamia: school *tablets* in Nippur

3.2.1. Role of Tables in the school mathematics of Nippur

3.3. Tables in the Data and Probability strand of the 2012 Chilean mathematical curriculum

3.3.1. Statistical strand since 1st to 6th grade

3.3.2. Tables and graphs since 1st to 6th grade

3.3.3. Critical analysis of the learning objectives related to the statistical strand

3.3.4. Improving tabular representation in the statistical strand

3.4. Tables in the strand of school Statistics: curricula in England, Brazil and Singapore

3.4.1. National curriculum in England

3.4.2. National curriculum in Brazil

3.4.3. National curriculum in Singapore

3.4.4. Comments

4. Tables in international assessments

- 4.1. Introduction
- 4.2. Tables in items of TIMSS tests
- 4.3. Reviewing items of TIMSS tests
- 4.4. Studies of cognitive processes associated to representations
- 4.5. Roles of individuals facing tasks related to Tables
- 5. Conclusions of Chapter

CHAPTER V. FOUR STUDIES ON TABLES 145

Chapter Summary

- 1. Introduction to the four studies

STUDY 1: INITIAL CONCEPTUALIZATION OF THE TABLE 149

- 1. Abstract

- 2. Analysis of productions from the Vergnaud's Theory of Conceptual Fields

- 2.1. Introduction

Theoretical perspective for tasks analysis

- 2.2. Methodology

- 2.2.1. Participants

- 2.2.2. Data Collection

- 2.2.3. Categories of Analysis

- 2.3 Data Analysis and Results

- 2.3.1. Students' productions of statistical representations

How did students put into practice the task?

- 2.3.2. Analysis of the students' productions

- 2.3.2.1. *Transnumeration* in students' productions

- 2.3.2.2. Analysis of conceptualization according to representation systems

- 3. Discussion in Study 1

Discussion with regard to *transnumeration*

Discussion with regard to conceptualization

STUDY 2: COGNITIVE DEMANDS IN A DATA ANALYSIS LESSON OF PRIMARY 172

1. Introduction

2. Analysis of the lesson viewing Cognitive Demands of Stein & Smith

2.1. Introduction

2.2. Methodology

2.2.1. Participants

The school and the teacher

The preparation of the lesson

2.2.2. Data Collection

The lesson

Interviews with the teacher

Discussion of the Group of Lesson Study

2.3 Results

2.3.1. Structure of the lesson

2.3.2. The main task

2.3.2.1. Production of statistical representations

Introducing the main task by the teacher

Performing the task by students

2.3.2.2. Justification of representations

The staging task by teacher

The implementation of the task by students

3. Discussion and Conclusions of Study 2

STUDY 3: OPERATION OF A TABULAR UNDERSTANDING TAXONOMY

193

1. Introduction
2. Development of a tabular taxonomy and its analysis using Delphi method
 - 2.1. Introduction
 - 2.2. Methodology
 - 2.2.1. Phase I
 - Instruments*
 - Procedures*
 - 2.2.2. Phase II
 - Subjects*
 - Instruments*
 - Procedures*
 - 2.3. Results
 - 2.3.1. Results of Phase I
 - 2.3.2. Results of Phase II
3. Discussion and Conclusions of Study 3

STUDY 4: CONCORDANCE BETWEEN TAXONOMY OF GRAPHIC AND TAXONOMY OF TABLES

207

1. Introduction
2. Methodology
 - Subjects*
 - Design*
 - Analysis*
3. Results
 - 3.1. Analysis from ordinal ratings
 - 3.2. Analysis from dichotomous ratings
 - 3.3. Hypothesis testing for the degree of concordance
4. Discussion and conclusions of Study 4

CHAPTER VI. CONCLUSIONS AND PROSPECTS

217

Chapter Summary

1. A brief summary
2. Findings and conclusions from the epistemological study
3. Findings and conclusions from the cognitive study
4. Findings and conclusions from the didactic study

Some findings from the literature review

Some findings from the curriculum

The Study

5. Contributions
6. Future prospects
 - 6.1. From the theoretical framework
 - 6.2. From the results of the studies

REFERENCES

236

LIST OF TABLES

256

LIST OF FIGURES

258

ANNEXES

259

INTRODUCTION

This dissertation focuses on the table as a learning goal in the first years of schooling.

The author, based on professional motivation and experience, addresses the difficulties in learning and teaching tables by first entering into a historical epistemological study of the issue, a substantial task in the Pontifical Catholic University of Valparaíso Doctorate Program in Didactics of Mathematics, and is able to unravel the constituent elements of the table as a rectangular network and its social uses as regards types of interpretations. Additionally, the author examines the status of the table in a school context according to recollection and exploratory analysis of data.

The dissertation then establishes the context of demands that society currently places on the curriculum, and in this context, based on currently dominant tendencies in statistics education, provides guidelines for dealing with tables in the classroom and maintaining high cognitive demands during the process -Stein and Schmidt-, characterizing in detail the underlying semiotic representations and theoretical conceptual structures -Vergnaud- that emerge in the process of conceptualization of the table in the first years of school. The learning method for statistical reasoning -Garfield and Ben-Zvi-, and in particular *transnumeration* -Wild and Pfannkuch- emerge as paradigms that accommodate the teaching proposal, meeting the social demand for curricular renovation and the international tendency to exceed the national status quo of arithmetization in statistics education.

This dissertation makes evident the *paramathematical* status of tables in the national curriculum, which sets tables aside as a tool and does not consider them a teaching object. The dissertation also elucidates the cognitive demands that studying tables makes on students, exploring in light of this an *ad hoc* table taxonomy and a proposal for critical education aimed at developing competence in representation and analysis of data for decision making.

SUMMARY

Chapter one presents the author's interests in statistical education and the research problem. It also presents the research questions and their goals.

Chapter two presents a review of the specialized literature pertinent to tables in statistics, focused on the learning difficulties that the table format presents and the implications for teaching. Additionally, it introduces the theoretical framework for the cognitive and didactic aspects of the research.

Chapter three offers a panoramic vision of the historic process of evolution of ideas about tables, their connotations as a human tool, and their emergence and development in diverse cultures and various moments in history, issues that contribute to understanding this object and its didactic reach. This chapter shows us the table and its presence as a storage tool, a calculation tool in numbering and meteorological systems, an analysis tool in scientific and mathematical fields, and its relation with the creation of numbers and the concept of a function.

Chapter four provides the scholastic status of tables. It addresses an epistemological goal regarding tables as a significant element in the analysis of the circulation of knowledge and its normalization. Going into greater depth in characteristics of the table format based on information science and statistics, a generic model for the table is proposed. This chapter investigates cognitive aspects, as it studies tables as representations that support the construction of meanings for data and identifies subjects' roles and cognitive processes associated with statistical tables. The chapter ends with a study of the role of tables in the list items of an international primary school test and its status in the current curriculum in Chile and three other countries.

Chapter five presents four studies that give us an approximation of the understanding of table learning at school level. It begins with an analysis of the evidence that emerges from student productions and instructor management in task demands, in a data analysis situation. It continues with the characterization of the types of interpretation that dealing with tables demands, proposing categories to create a hierarchy of understanding specific to tables, which finally will be tested.

Chapter six completes the work of the dissertation with the conclusions and findings for a first exploration of the progressive dominance of the conceptualization of tables by students in the first years of school, supported by the theoretical references and collected results.

In order to offer the reader a panoramic view, each chapter begins with an ordered list of the contents that we have titled “Chapter Summary”.

CHAPTER I

Study Foundations

Former les citoyens à la pensée de la variabilité et à la gestion de l'aléatoire n'est pas seulement, aujourd'hui, une question socialement vive : c'est aussi une question didactiquement vive.

Chevallard and Wozniak (2006)

Chapter Summary

1. Introduction

2. Issues this dissertation addresses

Social demands for including statistics in schools

3. Current status of tables in the Chilean curriculum

4. Issues that define the evolution of the dissertation

Expertise of the author that enriches the study

Potential of the table for handling data

The definition of a table and its use in school

5. Results of research on statistical representations

Studies of tables and graphs in the context of statistical literacy

Status of the understanding of tabular representations

6. Issues raised by the inclusion of statistics in the curriculum

7. Research questions

8. Goals of the dissertation

Specific goals

1. INTRODUCTION

This chapter addresses the focus, the central issues, and the questions that delimit the evolution of the study, and ends with the dissertation's central questions and goals.

This dissertation enters in the general framework of human cognition and in the making sense of a semiotic representation: the table.

The dissertation focuses on statistics education at the school level. More precisely, it is dedicated to elucidating the cognitive demands that tables impose on the learner and determining the cognitive demands to which the teacher recurs to orchestrate the learning of data analysis.

The research is carried out at the primary school level, where paper and pencil techniques are still prevalent. The research is centered on the data, at the heart of statistics, in order to analyze the data and describe its behavior, obtain information, and make reasoned decisions.

2. ISSUES THIS DISSERTATION ADDRESSES

Social demands for including statistics in schools

The insertion of statistics in schools has forced a dynamic upon the institutions that has not been addressed positively or successfully in Chile, an issue that complicates the work of a teacher educated for mathematics teaching and learning, upon whom the curriculum imposes a teaching task for which he or she has no experience or training. As such, statistics is included from the first years and throughout schooling, making it a difficult to address challenge for teachers who must produce this learning in their students, and a source of didactic phenomena.

Today in Chile, statistics education is considered part of learning and debate in society; it is present in the media and in schools.

In this respect, Chile is in step with declarations by various international organisms. For example, the *World Conference on Science for the 21st Century*, organized by UNESCO and by the International Council for Science (ICSU⁸), in its *Declaration on Science and the Use of Scientific Knowledge*, made in Budapest in 1999, expresses that, "... access to scientific knowledge for peaceful purposes from a very early age is part of the right to education belonging to all men and women, and that science education is essential for human development, for creating endogenous scientific capacity and for having active and informed citizens." It adds: "Science education, in the broad sense, without discrimination and encompassing all levels and modalities, is a fundamental prerequisite for democracy and for ensuring sustainable development." From 2005 to 2008 in Europe, a project was developed to improve the early teaching and learning of statistical reasoning in European primary and secondary schools⁹. Later, the National Council of Teachers of Mathematics of the United States identified data analysis and probability as its "Focus of the Year" for the period 2007-2008.

In 2010, the United Nations (UN) established World Statistics Day in order to make known the importance of this discipline in many decisions made by governments, businesses, and communities. Statistics participates in the planning of schools, hospitals, roads, and much more, and delivers information and understanding regarding tendencies and forces that affect daily life.

What's more, researchers in statistical education have displayed their certainty that educating citizens in thinking about variability and dealing with randomness is not only a social issue, but also a didactic issue, as expressed by Chevallard and Wozniak (2006).

⁸ *International Council for Science*, formally *International Council of Scientific Unions*, whose initials have been maintained

⁹ *Enhancing the Teaching and Learning of Early Statistical Reasoning in European Schools* project (2009, <http://www.earlystatistics.net/>)

The majority of the world's school curricula have recently incorporated a theme of statistics and probability in mathematics courses from the first years of schooling. This new content creates tension for teachers in their work and training, as their professional curriculum does not include solid proposals regarding statistics and statistics education, and there is no tradition of school-level statistics education. Additionally, teachers are not familiar with data analysis, with variability in data analysis, nor with non-determinism in mathematics (Batanero, Burrill, and Reading, 2001).

According to available information, the relationship between mathematics and statistics at the school level is not clear to teachers; in fact, it does not appear that, in general, they question this relationship, and a certain arithmetic reduction of statistics can be found in classrooms, which acts as "seeing" the data as numbers, and not as numbers in context.

3. CURRENT STATUS OF TABLES IN THE CHILEAN CURRICULUM

The table as a representation used in mathematics and statistics cuts across the entire curriculum. It appears as a content item in the statistics course, and also, explicitly, in all the themes of the mathematics course. With different functionalities and appearances, with a long history of everyday use, the table appears transparently in classrooms and textbooks. As a *paramathematical* object, tables do not make up a teaching item, but rather an "auxiliary" knowledge object, which must be "learned" (or which one must "get to know"), but which is not "taught" although it is necessary for teaching (and learning) the knowledge objects (Chevallard, 1985, 1997).

There are known conventions regarding making tables, but these are not taught.

Pfannkuch and Rubick (2002) point out that there is little research on students and the construction and interpretation of tables of statistical data and that research is needed on how students perceive them. Existing research supports that tables should be created by students (Cox 1999). However, when teaching tables, they are usually given to students already made. What's more, the results of this type of research do not appear to reach curriculum designers or textbook designers (Shaughnessy, 2007).

Nisbet *et al.* (2003) find that the process of reorganizing numerical data in frequencies is not an intuitive process for children in grades 1 to 3; Pfannkuch and Rubick (*op. cit.*) observe that tabulating data is an ability that requires determining the way to present it clearly and unambiguously, which implies some loss of the data's information, and conclude in their analysis that dealing with data in this way is an ability "more sophisticated than we had thought" (p. 13).

Statistical tables are an explicit curriculum content, but the curriculum is concerned with "doing", and the table is considered a transitional tool, in a state of "tabular technique". As such, as a tool, we can easily recognize the pragmatic value of tables, but it appears to be more difficult to determine their epistemological value, that is, their role as a mathematical object. Putting the epistemological value of tables in its place in the didactic system requires reflection and rebuilding, in which pertinent data analysis situations promote the emergence of their role as a tool (techniques) and as an object (concepts) and give tables status in the institution in order to contribute to learning tables and the objects involved with them.

This dissertation seeks to reveal tables in light of the complexity of the representations in which they intervene, their invisibility in teaching, their epistemological status as a tool and object, and their functionality in school statistics.

4. ISSUES THAT DEFINE THE EVOLUTION OF THE DISSERTATION

Expertise of the author that enriches the study

The author's academic training and experience in research projects related to statistics have allowed her to enrich her educational reflections and enter into greater complexity regarding didactics of statistics.

Regarding teacher training, this education and experience includes: elaboration, with other academics belonging to the Chilean Statistics Society (SOCHE), of a public document

presented to the Chilean Ministry of Education, titled “*Recommendations for School Curriculum in the Area of Statistics and Probability*”, which was well received; collaboration in the evaluation of the “Standards for Education in Mathematics for Middle-School Teachers” in the area of Statistics and Probability, carried out in the framework of a project of the University of Chile Center for Advanced Research in Education (CIAE); participation in two phases of the creation of items for the INICIA evaluative instrument, which forms part of the INICIA Program¹⁰, administered by the Ministry of Education for recently graduated professionals; participation in initial and continued training at the university level in didactics of statistics. This has allowed her to verify difficulties of teachers as well as students in forming concepts and representations in statistics and probability.

At the same time, her experience as a primary and secondary school teacher, and in programs for academically talented students, have allowed her to go more in depth in the issues related to statistics learning and teaching for school students.

Additionally, in her Master's Thesis in Didactics, the author developed an instrument for evaluating the *pedagogical content knowledge* in statistics of basic education professors, which was the statistics component of the Ministry of Education's Fund for Research and Development in Education (FONIDE) project 10980¹¹, which provided empirical evidence of difficulties of children and adults in understanding an item related to tables. This finding and a revision of prior representations of data allowed the author to enter in greater depth in the difficulties and errors of the adults and children in statistical tasks related to understanding graphs and tables, as well as in the epistemological obstacles to the knowledge in question.

Potentialities of the table for dealing with data

¹⁰ The INICIA Program is a component of the Program for Promotion of Quality in Initial Teacher Training. It is an initiative of the Chilean Ministry of Education whose goal is to strengthen teacher training provided by the country's institutions of higher learning. Its strategic lines are: defining orientations for initial teacher training and standards for each pedagogy major; design and implementation of a diagnostic evaluation of the knowledge of graduates with pedagogy majors.

¹¹ Project of FONIDE IV, “Pedagogical Content Knowledge and its Incidence in Mathematics Teaching at the Basic Education Level” by researchers Raimundo Olfos and Ismenia Guzman.

Statistical literacy includes basic important abilities that can be used to understand statistical information or research results. These abilities include the capacity to organize data, create and visualize tables, and work with different representations of data.

Among the representations of data in statistics, tables and graphs stand out, tables specifically in their roles of organizational support and analytical tool.

Tables, by registering all the data, aim at the specific and allow for displaying data that have different units of measurement. In tables' comparative function, the relations that present themselves interact principally with language (verbal and symbolic) and only secondarily with visual aspects, as their primordial function is not to show tendencies, but rather to deliver all of the data, capturing the totality of the "reality" they register.

An advantage of tables is that they are less susceptible to the external manipulations and simplifications that graphs can suffer; their disadvantage is that, for a large quantity of data, their efficacy in visually displaying the behavior of the data diminishes.

Exploratory Data Analysis (EDA) (Tukey, 1977) gives great importance to thinking, conjecturing, and learning about data before and during the construction of visual representations and promotes and values the use of graphical and tabular representations as a good analysis tool, not only as a way of registering data. A fundamental idea of EDA is that the use of diverse and multiple representations of data has a potentially positive role in the development of new knowledge and intuitions. Examples of these activities are converting data into tables, tables into graphs, lists of numbers into representations like stem-and-leaf plots, and making graphs that allow for comparing among various samples.

The definition of a table and its use in school

Table is a polysemic word, and as an object it presents distinct and interesting characteristics and functionalities to study. Tables can be considered physically as a segmented rectangular network, whose cells contain headings and values arranged logically, and whose function lies in concentrating semantic relations.

As school content, the table is present in practically every course; its cells can contain only images, only text, or only numbers, or a combination of these. The different contents and

their placement create different readings: a table of verb tenses differs from a table of historic events, or from the periodic table of the elements, or from multiplication tables, or truth or proportionality tables.

As content to be taught, tables are found in the mathematics program, specifically in statistics, principally as data and frequency tables.

As mentioned earlier, tables are used as a tool, but avoided as an object to be taught. The Chilean national curriculum, in the area of statistics (data treatment or data and probabilities) in the mathematics course, demands that students be capable of collecting, registering, analyzing, comparing, representing, reading, interpreting, and completing tables.

In order to create a table, a set of graphical requirements and specific cognitive capacities are needed. Some of the graphical requirements are situating categories in two dimensions, horizontal and vertical, creating cells, defining category labels, and writing the results of external or internal measurements in the cells. Some of the specific implicit cognitive abilities are categorizing subjects based on a variable, and, eventually, categorizing subjects based on a second variable and cross-categorizing the subjects according to both variables, and, in that case, counting the elements of each crossed category (frequencies).

5. RESULTS OF RESEARCH ON STATISTICAL REPRESENTATIONS

A revision of the statistics education research literature from 1995 to 2005 was published by Garfield and Ben-Zvi (2007); it offers a general panorama of studies on teaching and learning statistics at all levels. In particular, it points out that the importance and the complexity of statistical representations are found in lines of work such as: development of reasoning about distribution, center, and variability; development of understanding of statistics by teachers in their initial and continued training; errors and erroneous conceptions in reasoning about statistics and probability; visualization and exploration of data with technological tools.

Shaughnessy (2007), in the United States *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) “Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning” sustains that

lines of research on conceptual issues and teaching issues in statistics are required. He points to a national study of statistics items, applied from 2000 to 2003, whose results show poor performances (by U.S. students) on items that involve interpretation or application of information in tables or graphs. Among other guidelines, the Handbook proposes research on proposals of high cognitive level data analysis tasks that promote critical analysis and multiple representations in the classroom; in statistical literacy, he proposes investigating testing of reading and critical evaluation of information in tables and graphs.

Studies of tables and graphs in the context of statistical literacy

A book sponsored by the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) in collaboration with the International Association for Statistical Education (IASE) in 2011, collects research from around the world on statistics teaching in schools and challenges in teaching and teacher training. Although it centers on education and professional development for teachers to teach statistics, and the elements necessary for this education at the school level, it also includes research on reasoning and learning in teachers and students. Also, considering that one of the components of statistical literacy is familiarity with the ideas that graphic and tabular representations include, it includes research that deals with this specifically, for example: MacGillivray and Pereira-Mendoza on teaching statistical thinking (Batanero, Burrill, and Reading, Eds., 2011), teachers' graphical competence, by Gonzalez, Espinel, and Ainley (ibid.), and "teaching to teach" research statistics from Makar and Fielding-Wells (ibid.).

There are various studies on understanding of graphs and/or tables, among them Curcio (1989); Friel, Curcio, and Bright (2001); Aoyama (2007); Espinel (2007); Tauber (2006); Arteaga, Batanero, Cañadas, and Contreras (2011); Ben-Zvi and Arcavi (2001); Ben-Zvi and Sharett-Amir (2005), as well as studies based on characterizing statistical literacy, such as Gal (2002, 2004); Ben-Zvi and Garfield (2004); Schield (2000, 2006); Shaughnessy (2007); Watson (2006); and Burrill and Biehler (2011).

An attribute inherent to representations is *transnumeration*, a process that refers to the elements of thought involved in understanding information related to different

representations of data in diverse modalities (tables, calculations of statistical summaries, graphs, etc.).

This term, which identifies the process of “changing representations to create understanding” (Wild and Pfannkuch, 1999, p. 227), addresses the fact that sometimes in exploring data, a representation makes something new and unknown manifest, creating greater understanding of the problem. Shaughnessy (2007) points out that, by any means, *transnumeration* is a term that needs greater precision, and that a culture of learning and teaching that stimulates this could evolve if professors and curriculum developers consider the recommendations supported by research that indicates the need for students to have more opportunities to create their own representations of data rather than work with ready-made tables and graphs.

Status of the understanding of tabular representations

As we will see later, in the process of understanding a table, various processes must be activated, among these, reading, search and interpretation, and evaluation. The process of producing a table implies processes of writing, of creating, and of completing. Putting data in its place activates understanding of the relational structure of the table and opposes a reading with simplified language -about the variable and its categories- due to the eventually enormous quantity of information reduced to a bi-dimensional space.

The processes of comprehension vary in complexity according to whether one is dealing with a table with a data registry, a transition table for making calculations, or a table that allows for analysis and ends up being a synthesis tool in exploratory data analysis. A comprehensive reading of a statistical table includes considering its context and looking for the behavior of the data.

Pfannkuch and Rubick (2002, p.5) identified specific instances of transnumeration in statistical thinking: (1) making measurements that capture the characteristics of the real situation; (2) transforming the initial data in other representations -such as ordered data, graphs, tables, and statistical summaries- to look for meaning in the data; and (3) communicating to others in terms of the meaning of the real situation.

6. ISSUES RAISED BY THE INCLUSION OF STATISTICS IN THE CURRICULUM

The recent inclusion of statistics in the school curriculum poses new issues for research from the beginning of schooling. The familiarity that tables present has derived in a certain transparency of the table, present in schools as a tool, but not as a learning object. In an area as important as EDA, statistical representations like tables take on relevance, as they allow for discovering characteristics in data that facilitate resolving the problem in question.

A review of the background of current research in statistics confirms the necessity of addressing one of the components of statistical literacy, representations, and, in particular, frequency tables at the primary school level, as an analysis tool in data exploration and also as an object that is defined, that needs to be examined, and with which operations appropriate to its structure can be carried out.

The functional diversity of the table and its cross-cutting presence in school subjects and in real life demand that we look at how it is learned and taught.

As a didactic problem in statistical education, it is interesting to research the cognitive processes of learners faced with tabular representations and the direction of the teacher in a lesson with statistical representations. Both points of the process require empirical investigation in school environments of teaching and learning statistical tables.

A literature review shows that in studies of teaching and learning statistics in the first years of schooling, the research questions proposed are, principally: What are some of the errors and misconceptions in statistical reasoning? How do school children come to understand statistics? How do pedagogy students and service teachers develop understanding of statistics? How do teachers begin the challenge of *creating statistical literacy* in their students? Garfield and Ben-Zvi (2007) point out that studies in the area, reviewed as a whole, show the difficulties students have in learning statistics and the necessity of revising teaching methods.

7. RESEARCH QUESTIONS

This dissertation enters in a vision of didactics of mathematics interested in characterizing the status of tables in society (their functionality historically, in information science, in statistics, in the curriculum, and in international evaluations), in identifying the actions that teachers carry out in implementing a data analysis learning situation dealing with making tables (the task proposed and the management of maintaining cognitive demands), and in discovering how learners gradually make tables to organize data in the first years of schooling (the progression of their representations).

We assume that school statistics is a new field of study, whose principal goal is to provide statistical literacy to students, education that demands of the teacher new perspectives and actions that allow learners to be able to interpret and critically evaluate information and develop the capacity to communicate their opinions regarding this information and thereby make informed decisions.

Specifically, as a result of schooling, it is hoped that students recognize and are able to interpret different representations of data, among them, tables. However, faced with the evidence of the absence of tables as a learning object, the question that guides this research is:

How do children learn tables?

The relations contained in tables allow for discerning the behavior of data associated with a context, and allow for responding to and communicating an issue. In the use of data tables in schools, difficulties are detected, but there is little research specifying the difficulties that subjects have in dealing with tables. The table links a physical structure, a relational positioning of data, and diverse use functions, with a statistical semantic content, all of which contributes to making learning and teaching tables more complex. So, we ask:

12. *How does the notion of a table emerge in students in the first years of schooling?*
13. *How do students construct meaning from data?*
14. *What representations do students produce when faced with a new data analysis task?*

15. *What is the thinking behind the representations that students produce?*
16. *What levels of conceptualization are reflected in these representations?*
17. *What characteristics does a teaching task aimed at data analysis have?*
18. *How does the teacher manage a data analysis lesson in primary school?*
19. *How does the teacher maintain the task's level of cognitive demand?*
20. *What are the cognitive demands that tasks associated with tables create?*
21. *What are the components of a hierarchy of understanding tables?*
22. *Are the levels of understanding graphs the same as those for tables?*

8. GOALS OF THE DISSERTATION

The general goal of this study is to reveal the table as a learning object in the first years of schooling in Chile.

As mentioned, trying to get citizens to acquire statistical literacy is a socially and didactically active issue. This research addresses an aspect of such a proposal, which is the frequency table used in school.

The table as a representation is diverse in contents, forms, and applications. Tables are widely used in various disciplines, especially as calculation and analysis tools in statistics and probability. The framework of statistical literacy in which we position this research is, at the same time, part of a larger framework of general literacy. In statistics, three types of tables are generally used: frequency tables, distribution tables, and contingency tables. In primary school statistics, the frequency table is used in its modality as a counting table, an absolute frequency table, a frequency table with other statistical calculations, and even a double-entry table that gives the frequencies of two variables. This work principally addresses one of the statistical representations used in schools: the frequency table in its most elemental definition.

Considering a didactic perspective -as a discipline related to the study of the processes of knowledge transmission- we want to study the historic evolution and epistemology of tables, the conceptualization of tables by subjects, and their processes of data analysis in working with tables, as well as explore some teaching proposals regarding frequency tables.

The principal goals of this study are:

- 1) Carry out an epistemological historic analysis of tables, identifying their diverse purposes in different times and cultures;
- 2) Characterize the cognitive process in data analysis using frequency tables;
- 3) Identify in teachers' classroom management the maintenance (or lack thereof) of the cognitive demands that a frequency table task creates;
- 4) Configure levels of understanding of tables that help to explain the understanding of subjects faced with tables.

The didactic and cognitive components of this work enter in the framework of Garfield and Ben-Zvi's *Statistical Reasoning Learning Environment*, in Vergnaud's *Theory of Conceptual Fields*, in Stein and Smith's *Levels of Cognitive Demand*, and in Wild and Pfannkuch's concept of *Transnumeration*.

For the first goal, regarding the epistemological component, we will enter in depth in the emergence of the table object and its role in knowledge development through an epistemological historical study. For the second goal, the representational functioning of tables will be analyzed (Vergnaud, 1990, 1994, 1996, 2007, 2013; Wild and Pfannkuch, 1999) to reveal subjects' tendencies, difficulties, and patterns in the process of understanding. For the third goal, Garfield and Ben-Zvi's *Statistical Reasoning Learning Environment* (Garfield and Ben-Zvi 2007, 2009; Ben-Zvi 2011) will be considered as well as Stein and Smith's cognitive demands (Stein and Smith 1998, 2000), considering teachers' learning communities in a lesson study. For the fourth goal, related to configuring a hierarchy of levels of table reading, categories will be defined based on the epistemological historical study and the analysis of table items in the TIMSS test (2003, 2007, and 2011).

Specific goals

With the theoretical framework outlined, we propose:

At the epistemological level related to tables:

- 3) Demonstrate their role as a tool from *proto-statistics* to modern days.
- 4) Define their role as a significant element in the analysis of knowledge circulation, as a storage repository and at the same time as a support for normalizing knowledge in antiquity.
- 3) Show evidence of their presence in diverse cultures or societies (Egyptian, Babylonian, Greek, Maya, and Inca) and their role as storage for administrative archives, as archives of numbering and meteorology systems (in schools), and as scientific and mathematical archives (in academies).
- 4) Specify their role in the emergence and development of the concept of a function (their presentation in multidimensional arrays and interpolation techniques as representations of continuous phenomena).
- 5) Clarify their uses and roles in statistical activity, related to methodologically presenting a set of data or research results, as instruments for facilitating calculations, or as heuristic tools for exploring new situations.

At the cognitive level related to tables:

- 6) Identify tables as representations that support the construction of meaning for data.
- 7) Identify processes in the development of reading, interpretation, completion, and construction of frequency tables at the school level.
- 8) Define the ability to transumerate data to obtain greater understanding of the data, by transforming raw data to a tabular representation.
- 9) Configure a hierarchy of levels (taxonomy) of reading specific to tables.
- 10) Determine whether the proposed taxonomy of understanding of tables behaves similarly to a taxonomy of understanding of graphs.

At the didactic (*sensu stricto*) level related to tables:

- 11) Study the role of statistical tables in the primary school mathematical education programs of study in three OECD countries.

- 12) Study the role of statistical tables in the primary school mathematical education program of study (2012) in the data and probability theme in Chile.
- 13) Study the role of tables in international tests according to the proposed activity: reading, interpretation, completion, and construction.
- 14) Elaborate, implement, and analyze a lesson that contributes to statistical reasoning through data analysis and the use of tables.
- 15) Elaborate, implement, and analyze a lesson centered on data analysis and statistical reasoning with high-level cognitive demands.