Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

INSTRUMENTO PARA LA EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO DE ESTADÍSTICA EN PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Tesis para optar al grado de Magíster

Didáctica de las Matemáticas

De: María Soledad Estrella Romero

Profesor Guía: Sr. Raimundo Olfos Ayarza

2010

La investigación presentada en esta tesis de magister agradece el financiamiento de PIA –CONICYT, Proyecto CIE-05 2010 del Centro de Investigación Avanzada en Educación.

Former les citoyens à la pensée de la variabilité et à la gestion de l'aléatoire
n'est pas seulement, aujourd'hui, une question socialement vive : c'est aussi une question *didactiquement vive*.
Chevallard (2006).

On peut espérer que la Didactique, en évitant les inférences douteuses auxquelles ces approches latérales nous condamnent, contribuera à améliorer la diffusion de la statistique.
Brousseau (2009).

GLOSARIO DE ACRÓNIMOS

CC	Conocimiento del Contenido
CPC	Conocimiento Pedagógico del Contenido
CPC-DA	Conocimiento Pedagógico del Contenido del eje Datos y Azar
CP	Conocimiento Pedagógico
CMO	Contenidos Mínimos Obligatorios
CRAC	Conocimiento del Profesor en Relación al Saber del Alumno
CEE	Conocimiento del contenido estadístico para la enseñanza
CR	Conocimiento de las representaciones concretizadoras
ENS	Adaptación del saber al nivel escolar de la matemática
CURR	Conocimiento del Currículo
OTME	Organización de las tareas matemáticas estadísticas escolares
CRE-M	Concepciones del profesor sobre la Estadística
CRE-A	Concepciones del profesor del aprendizaje (Teorías)
DIES	Diseño de escenario para aprendizaje
ADQU	Conceptualizaciones de alumnos (sus conocimientos Adquiridos)
DIFI	Dificultades más frecuentes de los alumnos
ERRO	Errores posibles de los alumnos
ESTG	Estrategias usuales de los alumnos
ID	Ingeniería Didáctica
MEDI	Medios didácticos
OF	Objetivos Fundamentales
SIMCE	Sistema de Medición de la Calidad de la Educación
TAD	Teoría Antropológica de los Didáctico

ANEXOS

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO

1.1 Introducción

Para definir la problemática y naturaleza de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística se requiere considerar varios elementos, como el estado del sistema educativo, las demandas sociales, el modelo de conocimiento, el dominio matemático y el conocimiento institucional.

Este capítulo explicita la problemática a investigar, entrelazando las exigencias sociales que imponen un nuevo rol a la Estadística y el profesor en el escenario escolar y que se plasman en el nuevo eje de Datos y Azar que atraviesa todo el currículo escolar chileno.

Finaliza el capítulo con la estructura de este trabajo de tesis y un resumen de la misma.

1.2 Problemática Didáctica

Los medios de comunicación como periódicos, revistas, televisión, sitios web, cartas publicitarias o informativas, entre otros medios, enfrentan frecuentemente al ciudadano común a cotejar y decidir. La lectura y comprensión de tablas, los gráficos diversos, las argumentaciones con base estadística, se instalaron en el espacio humano cotidiano. Comprender la Estadística y la Probabilidad permite a la gente razonar y llegar a conclusiones sobre la base de datos, juzgar la calidad de los argumentos de otras personas, reconocer el grado de incertidumbre en cualquier situación, y cuantificar esa incertidumbre para tomar decisiones. Es un deber social que todos los ciudadanos comprendan este lenguaje.

La investigación aconseja que el foco de la enseñanza Estadística debe estar en desarrollar el pensamiento estadístico propio de un ciudadano y consumidor informado, otorgando alfabetización estadística, la que incluye las habilidades de organización datos, construcción de tablas, y representaciones de datos; como también la comprensión de conceptos, el vocabulario y los símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre, (Ben-Zvi y Garfield; 2004).

Chile, como muchos otros países, mediante el ajuste curricular del año 2009, incluye los temas de Estadística Descriptiva e Inferencial y Probabilidad, a través de todo el currículo matemático, desde el primer nivel escolar hasta el término de la educación media. La incorporación del eje Datos y Azar en el currículo chileno provoca nuevas exigencias a los profesores que tienen a su cargo la implementación de esta componente del programa de estudios de matemática, un desafío no tan solo a los profesores sino también a los educadores de profesores. En Chile, la mayoría de los profesores no ha tenido en su formación inicial estudios en Estadística o en Inferencia o en Probabilidades. A nivel nacional son pocos los profesores de enseñanza básica con mención en matemática quienes, durante un breve tiempo en esta formación continua, se han enfrentado al desafío de adquirir los conocimientos y habilidades para responder a las exigencias de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad. A su vez, los profesores de matemática de educación media han tenido estudios teóricos sobre probabilidad pero no sobre su enseñanza.

Respecto a la calidad de la educación chilena el informe de la OECD (2010) aconseja a nuestro país dirigir sus esfuerzos a mejorar la formación de los profesores en todos los niveles de educación, incluyendo la calidad de los programas de educación inicial de los profesores, la calidad de sus formadores y sus programas pedagógicos. Además, “De manera general, el gobierno… debería identificar las buenas prácticas y otorgar a las escuelas la ayuda necesaria para difundirlas por todo el sistema escolar”, (pág. 9).

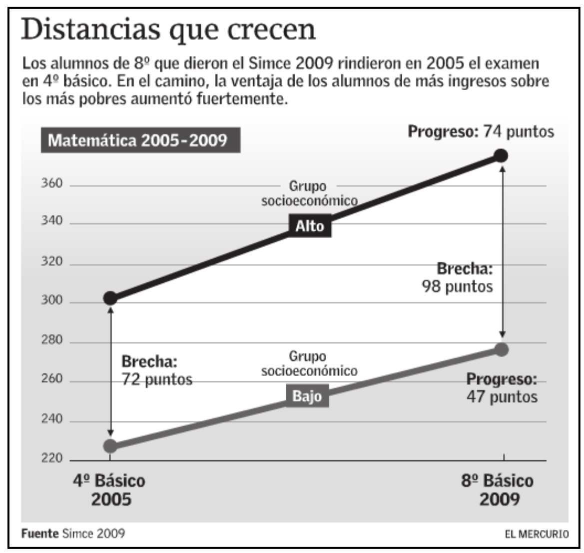


Figura 1: Resultados de matemática de alumnos durante el nivel 4 y el nivel 8 según nivel socioeconómico, SIMCE 2009.

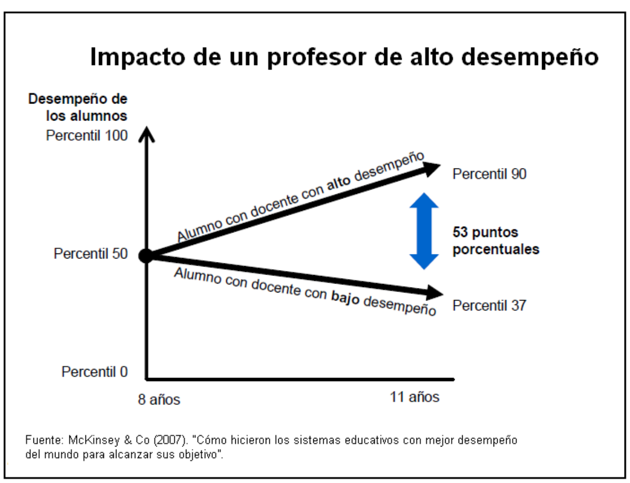


Figura 2: Gráfico del impacto de un profesor de alto desempeño

Los resultados de nuestros alumnos en la prueba de medición SIMCE muestra que aumentaron las distancias entre los alumnos más pobres de octavo que dieron el SIMCE 2005 y los de mayor ingreso que rindieron el SIMCE 2009, una brecha que de 72 puntos creció a 98 puntos, ver figura 1. El informe McKinsey (2007) señaló que el conocimiento matemático evidenciado por el profesor de alto desempeño en el aula impacta positiva y fuertemente sobre el rendimiento del estudiante, y a la vez, un profesor con bajo desempeño impacta negativamente sobre él (ver figura 2).

El profesor es un actor fundamental en el proceso educativo; en Chile existe evidencia de que las habilidades, competencias y destrezas de los que ingresan a esta profesión no son elevadas. Algunas investigaciones internacionales sobre el desempeño del profesor en el aula muestran sus concepciones erróneas acerca de la matemática, o bien dificultad para explicar en términos simples una idea abstracta y/o de anticiparse a los errores de sus alumnos. Otros estudios han detectado que los profesores de matemática enseñan los contenidos de Estadística y Probabilidades como técnicas de cálculo, y además de mostrar un conocimiento superficial de la Estadística, carecen de conocimientos en la Didáctica específica.

Un factor clave para otorgar educación matemática de calidad es un conocimiento profundo y sustancial del contenido matemático por parte del profesor, (Ma, 2010; MT21, 2007). Existe falta de conocimiento compartido acerca de los conocimientos necesarios para la Enseñanza de la Estadística (Burgess, 2007), y falta de investigación específica orientada en la educación y desarrollo profesional del profesor de matemática que debe enseñar Estadística, y específicamente centrada en el conocimiento pedagógico de la Estadística, (Pinto, 2010).

Por otra parte, desde el trabajo de Shulman a mediados de los ochenta, el conocimiento pedagógico del contenido, CPC, ha originado un gran interés como modelo para el mejoramiento de la formación de profesores y como objeto de estudio. Si bien el CPC en Educación Matemática ha sido investigado en los últimos años, es un constructo teórico muy poco explorado en la Educación Estadística.

En nuestro país existen diversas presunciones acerca de las principales variables que afectan la eficiencia de la enseñanza. La disponibilidad de antecedentes con soporte empírico favorecerá la consistencia y el grado de validez de los instrumentos usados en el presente, para la evaluación y promoción del profesorado, para el financiamiento de su formación inicial y continua, para la definición de estándares de contenidos y futuras mallas curriculares en la formación inicial de profesores en el país.

El actual estado de la educación en Chile y la escasa evidencia empírica en educación confieren sentido a (1) la indagación sobre el conocimiento pedagógico del contenido, CPC, del profesor de educación básica en torno a la complejidad del conocimiento del contenido estadístico, CC, que requieren los profesores de matemática de enseñanza básica; y también, (2) a la construcción de instrumentos evaluativos que midan el CC y CPC de Estadística elaborados sobre el conocimiento necesario de los futuros profesores de educación básica con respecto al CC y al CPC en la enseñanza de la Estadística.

1.3 Objetivo General

El propósito fundamental de esta Tesis de Grado es disponer de un instrumento, construido según el estado del arte de los nuevos enfoques de Educación Estadística, del conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y del currículo, con validez de contenido para medir el CPC y el CC que posee un profesor de educación básica para la enseñanza de la Estadística dado el actual currículo.

1.3.1 Objetivos Específicos

(1) Disponer de ítems referidos al CC que demanda el nuevo currículo al profesor y los nuevos enfoques en Educación Estadística, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.

(2) Disponer de ítems referidos al CPC que demanda el nuevo currículo al profesor, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad, esto es:

Ítems referidos al conocimiento de los profesores acerca de la **enseñanza** del contenido, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.

Ítems referidos al conocimiento de los profesores acerca de la **relación de los alumnos con el contenido**, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.

Ítems referidos al conocimiento de los profesores sobre el uso de **medios didácticos**, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.

(3) Asegurar la validez de contenido del instrumento para medir el CC y el CPC del profesor de educación básica, en cuanto a la Estadística, Inferencia y Probabilidad.

Este estudio constituye una investigación de tipo cualitativo, que direcciona su análisis en la Didáctica de la Estadística, en cuanto al aprendizaje, enseñanza, y evaluación en Estadística, y el conocimiento de los profesores sobre Estadística.

1.4 Estructura del estudio

Para disponer de un instrumento que mida el CPC en Estadística, es necesario realizar una profunda investigación del estado del arte respecto a las variables que conforman el espacio de enseñanza aprendizaje de Estadística. El presente trabajo se organiza en una primera Parte denominada Antecedentes del Estudio, y en una segunda Parte señalada como Estudio Experimental.

Los Antecedentes del Estudio tienen por objetivo dar una comprensión sobre la generación y desarrollo de los objetos estadísticos y los probabilísticos. Las variadas representaciones utilizadas en Estadística demandan su estudio desde la noción de representación como de los distintos procesos involucrados en la construcción de las representaciones, destacando entre ellos el proceso transnumerativo. También en esta primera Parte se investiga en el rol del profesor en la Educación Estadística, profundizando en el conocimiento pedagógico del contenido y en la enseñanza de la Estadística dentro del actual marco curricular chileno.

El Estudio Experimental establece los objetivos, especifica el marco teórico y el diseño metodológico, entregando en detalle el plan de trabajo realizado desde la construcción del instrumento piloto hasta el análisis didáctico de cada ítem, concluyendo con la validez de contenido del instrumento final. Termina esta segunda Parte con las conclusiones, discusión, aportes del Estudio, limitaciones y propuestas a futuro.

1.5 Resumen del Estudio

La inserción de la Estadística en el nivel escolar se declara en el sector de matemática, y desde el currículo demanda diversas habilidades a los profesores de educación básica que deben implementar el programa de estudio en las aulas chilenas.

Los insuficientes avances que muestra la educación en Chile hacen más difícil la tarea. La investigación en este ámbito ha promovido modificaciones en las mallas profesionales y reflexión en los centro de enseñanza respecto a su responsabilidad y capacidad de respuesta en la formación de profesores. Sin embargo, las diversas propuestas de solución que emergen y se llevan a cabo tanto para la formación inicial y continua, no ofrecen los resultados positivos; y prueba de ello son los resultados de las pruebas nacionales y/o las internacionales que muestran un estancamiento y/o un muy escaso progreso.

Las exigencias a los profesores en nuestros sistemas occidentales se caracterizan por tratar de responder al mundo actual, cambiante, globalizado y con diversidad. Los profesores necesitan muchas destrezas que les permitan interactuar entre los individuos y entre los grupos, y crear las condiciones para construir en forma conjunta el conocimiento.

El profesor debe saber lo que enseña y debe saber cómo enseñarlo. Cada contenido matemático-estadístico posee una complejidad diferente y requiere una forma distinta de entregarlo; y es en cada individuo y en cada sala de clases donde aumentan las exigencias en el actuar del profesor efectivo. Además, la matemática y la estadística trabajan en mundos distintos, con lenguajes y concepciones diferentes: uno trata principalmente con lo determinístico y otro trata con lo no determinístico.

Hace unos treinta años nace en Francia la Didáctica de la Matemática y durante estas décadas se consolida como un cuerpo teórico en constante desarrollo, que provee soluciones a las muchas problemáticas de la educación. Asimismo, hace un par de décadas emerge la investigación sobre el profesor en su conocimiento disciplinario y en su conocimiento profesional para llevar a cabo la enseñanza; este constructo también en desarrollo busca respuestas que ayuden en la construcción del conocimiento profesional que potencie el aprendizaje en los alumnos.

El presente estudio tiene como meta disponer de un instrumento que evalúe el conocimiento pedagógico del contenido de Estadística en profesores de educación básica. Para construir el instrumento se realizó un estudio de antecedentes previos, sobre el avance histórico en la construcción de los objetos estadísticos, las representaciones, el conocimiento pedagógico del contenido y los modernos enfoques de la Educación Estadística.

El marco teórico asumido incluyó primordialmente el conocimiento pedagógico del contenido de Shulman, pero buscó entrelazar con los conceptos de la Didáctica de la Matemática. El constructo del CPC ocupó tres dimensiones: la enseñanza del contenido estadístico (la transposición didáctica), el conocimiento del profesor en relación al saber matemático-estadístico del alumno (CRAC), y el rol de soporte de las representaciones concretas.

Con estos antecedentes se procedió a buscar, elegir, modificar y crear ítems de conocimiento del contenido estadístico; posteriormente, se procedió a crear y refinar ítems que midiesen el conocimiento pedagógico del contenido estadístico. Este banco de ítems creados, relativos a Estadística, Inferencia y Probabilidad bajo el marco curricular del ciclo básico, fue puesto reiteradamente a prueba y recibió variados ajustes.

El instrumento se validó internamente mediante el análisis a priori de los 20 ítems de contenido de Estadística, Inferencia y Probabilidad. Y principalmente fue validado externamente por medio de la validación de contenido, a través de un panel de ocho jueces, cuatro extranjeros y cuatro chilenos, quienes en forma individual dirimieron en qué aspecto de las tres dimensiones del conocimiento pedagógico del contenido de Estadística ubicaban los ítems propuestos.

La validez de contenido respecto al CPC asumida exigió una alta valoración del panel para incluir un ítem en el instrumento final. Este proceso de validez entregó un instrumento final de 14 ítems que de manera proporcional al currículo posee ítems de Estadística, Inferencia y Probabilidad; y de manera equitativa contiene ítems que miden dos dimensiones del conocimiento pedagógico del contenido del profesor: la enseñanza del contenido estadístico y su conocimiento respecto al saber del alumno.

CAPITULO 2

ANTECEDENTES DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS OBJETOS ESTADÍSTICOS

2.1 Introducción

El estudio del acontecer de la Estadística en la historia entrega un modo de conocimiento del mundo que, más allá de proveer un conjunto de técnicas, resultados y teoremas, entrega una comprensión del avance de la humanidad en esta área. La Estadística ha transitado a través de la evolución de la Ciencia, de la organización de los Estados, y del gobierno del Estado.

La Estadística además de ofrecer una función utilitaria, contribuye al desarrollo del pensamiento estadístico y el pensamiento probabilístico de los sujetos.

2.2 Los primeros registros

La Estadística en sus comienzos es tanto signo del nacimiento de un poder en una ciudad y el poder religioso, ambos poderes se confunden en su inicio. El almacenamiento de información más remoto se ha encontrado en un número de tallados principalmente en hueso o madera del Paleolítico Superior (aproximadamente 35000 años en Europa y 60000 años en África, a. C.).

Figura 3: Caballo grabado en hueso, 12500 a.C. Museo Británico.

Las primeras interpretaciones de la utilización de los objetos tallados se asociaban a rituales, es decir, con frecuencia los antropólogos al no entender el significado o el uso de un objeto determinaban que ese objeto pertenecía a un ritual religioso. Esta dificultad de interpretar los objetos arqueológicos, es la que podría ampliar el rango de almacenamiento de información realizada por los humanos, entre 200000 a 20000 a. C., (Oriol, 2007).

Figura 4: Escritura cuneiforme, 1900-1700 a.C. Museo Británico.

2.3 La escritura y las listas

La escritura de los sumerios es la forma más temprana de expresión escrita de la que se han encontrado restos arqueológicos. Los documentos más antiguos de escritura se encontraron recién en 1997, en Umm el-Qaab, un conjunto de 300 vasijas y tablillas de arcilla datadas de 3300 a 3200 a. C. Esta escritura surgió desde un sistema de pictogramas, posteriormente las representaciones pictóricas se simplificaron y se hicieron más abstractas, dando lugar a lo que se conoce como escritura cuneiforme.

Estudios recientes sobre los orígenes de la escritura indican que ésta fue desarrollada principalmente para fines contables, los comerciantes la utilizaban para enviar mensajes a otros comerciantes, como breves indicaciones —palabras o números, listas de palabras— en jarras o bandejas, aparentemente con la intención de encargos.

En las listas por primera vez hay conciencia de las manifestaciones iniciales de designación de los objetos y el concepto de número. En la escritura y los números aparece el primer resultado de una forma de Estadística correspondiente a la clasificación y presentación de datos.

Los signos cuneiformes eran escritos por escribas mediante cuñas sobre tablillas, casi siempre de arcilla (raramente grabados en metal), que luego se guardaban en primitivas bibliotecas, muy bien organizadas, que servían para el aprendizaje de futuros escribas. Estas bibliotecas pertenecían a la escuela de cada ciudad o, a veces, a colecciones particulares. Las tablillas estaban escritas en columnas que indicaban: la serie y el número de la tablilla en esa serie, para su correcta catalogación, el texto, y a su vez en la primera línea de la siguiente tablilla, el propietario de la tablilla, el año de reinado del soberano correspondiente, en ocasiones los títulos del mismo, la ciudad de la escuela y el nombre del escriba y, sólo a veces, el autor.

Figura 5: Tablilla cuneiforme con observaciones de Venus, 700 a. C.

Con el tiempo la escritura llevará a cabo funciones muy diferentes de la lista de encargos —la descripción del artículo y número de ellos— para funcionar de forma más trascendente incluyendo, por ejemplo, la descripción de un catastro, los algoritmos de cálculo, contratos comerciales, entre otros.

En el primer milenio del período babilónico existen anotaciones relacionadas con el catastro y listas de la salida del sol y la luna, las que permitieron el surgimiento de una cierta previsión astronómica. Ello muestra un avance desde el pasado de la lista de los objetos y números, es decir, Estadística Descriptiva, a los inicios de un enfoque estadístico predictivo del futuro.

La figura 5 muestra el texto de la tablilla, hecha en Nínive, en el siglo VII a. C., cuyos datos informan de las observaciones del planeta Venus realizadas en el reinado de Ammisaduqa, rey de Babilonia.

El doble rol de las listas, en primer lugar la codificación reservada para aquellos que saben las claves (y por ello saben con antelación lo que encontrará en la tablilla), y la relativa a la predicción de un futuro impredecible (las fases de la luna les permiten predecir las inundaciones del Nilo), instala por mucho tiempo respeto y confianza hacia la Estadística.

Esta dificultad de conseguir el conocimiento desde el conocimiento mismo, tanto como conseguir la falta de conocimiento desde el conocimiento mismo, lo que es parte integral del pensamiento estadístico; no permite el desarrollo ni el pensamiento del área.

Oriol (2007, p.10) señala que este aspecto de la Estadística puede resultar un obstáculo para su desarrollo, y desde una visión didáctica, como un obstáculo para el desarrollo del pensamiento estadístico en el individuo.

2.4 Del conteo a las tablas

Ya se utilizaban ciertas muescas gráficas en pieles, rocas, huesos, piedras, palos de madera y paredes de cuevas para llevar un control del número de personas, animales o ciertas mercancías. Hacia el año 3000 a. C. los babilónicos usaban pequeños envases moldeados de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y de las telas vendidas o permutadas. La idea de la escritura en Mesopotamia, en Elam, nace de una necesidad estrictamente utilitaria, principalmente económica, (Ifrah, 1981 citado por Oriol, 2007).

Los métodos para registrar información han variado con el tiempo y lugar. No todas las sociedades han desarrollado sofisticados sistemas de escritura y no todos los métodos de registro de la información requieren de la escritura. El imperio inca de América del Sur estaba en su apogeo en el siglo XVI d. C. y lo mantuvo en una gran área que se extendía desde el Ecuador actual al Perú, y zonas de Bolivia y Chile. Era una civilización compleja, y según algunos antropólogos, al parecer no desarrolló un sistema de escritura. La información se almacenaba en quipus, que eran grupos de cuerdas de diferentes colores que se anudaban para registrar las estadísticas del censo, los registros económicos y fiscales. Los Quipucamayoc eran las personas encargadas de llevar los registros de los acontecimientos y las

Figura 6: Quipu recuperado de una tumba en Perú, Museo Peabody de la Universidad de Harvard.

estadísticas del complejo estado inca de dos millones de kilómetros cuadrados de extensión y más de 12 millones de habitantes.

Quizás, son las necesidades estadísticas y contables las que impulsan el nacimiento de la escritura y la formación de la escritura, y ésta aumenta la aparición de otros registros, como los tabulares.

La primera tabla matemática de datos en la historia del mundo, proviene de la ciudad sumeria de Shuruppag, 2600 a. C. Esta tabla está encabezada por tres columnas con diez filas, en las dos primeras columnas están la lista de las medidas de longitud de 3,6 km a 360 m y la última columna entrega productos para medir el área. Sorprende el hecho que los académicos matemáticos de Mesopotamia empleasen tablas muy ocasionalmente, prefiriendo expresar en listas ciertas equivalencias aritméticas y de medidas, (Campbell-Kelly, 2003).

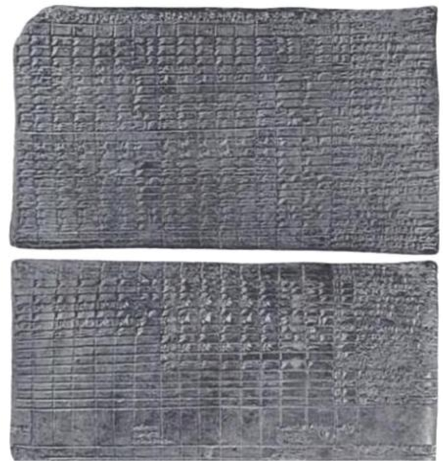


Figura 7: Tablilla del templo Elil en Nippur, 1295 a. C. University Museum, Pennsylvania.

La tablilla de la figura 7, registra los salarios mensuales de 45 empleados de un templo de Nippur, Babilonia, 1295 a. C., y tiene la mayoría de las características clásicas de las tablas de Mesopotamia. Las columnas en el encabezado superior de la tabla indican el nombre del mes, existen también subtotales para cada persona semestral y anualmente, y los nombres y las profesiones se muestran en la columna final.

En tiempos en los que no había calculadoras mecánicas ni electrónicas, la tabla, como herramienta tabular, ofrecía gran rapidez en los cálculos. En el siglo XVII, una gran producción de tablas surge con la construcción de tablas de logaritmos de Napier; en su primer libro se encuentran 90 tablas con los senos y logaritmos de senos, y cosenos y logaritmos de cosenos. Posteriormente, los matemáticos británicos Briggs y Gunter publican las primeras tablas de logaritmos de números a base 10, y logaritmo de base de 10 de las funciones trigonométricas.

Un nomograma es un instrumento gráfico de cálculo, un diagrama bidimensional que permite el cómputo gráfico y aproximado de una función de cualquier número de variables. El nomograma de alguna manera juega el mismo papel que las tablas numéricas utilizadas para el cálculo numérico. Fueron los ingenieros militares y otros funcionarios encargados de resolver problemas cuantitativos de carácter iterativo, quienes se procuraron ayudas para su cálculo. Así en Francia, Pouchet publicó en

1797 una obra titulada Métrologie terrestre, que contiene un apéndice designado Arithmétique linéaire en el que contiene el primer intento de construcción de tablas gráficas de doble entrada, (Tournes, 2000).

Hay escasa atención al registro tabular pese a sus importantes funciones mnemotécnicas, computacionales y heurísticas, como por ejemplo, las tablas de los elementos químicos de Mendeleiev, las tablas de multiplicar u otras tablas, como el triángulo de Pascal. Las tablas son herramientas de uso generalizado; los matemáticos, fisicos, químicos, economistas, ingenieros, entre otras profesiones, utilizan las tablas numéricas como herramientas en sus trabajos.

Desde otra perspectiva, al situar un conjunto de números en el plano siguiendo un determinado criterio, se obtiene una tabla numérica, en la que cada número se puede considerar como un punto en el plano y cada uno de estos puntos queda dotado de un significado numérico. De este modo ciertas tablas numéricas permiten establecer conexiones entre lo numérico y lo geométrico.

2.5 Los Catastros

No existe un único concepto del catastro, en general se entiende como un inventario de la totalidad de los bienes inmuebles de un país o región de éste. Algunos de sus elementos esenciales son: su rol de inventario o registro público; globalidad pues involucra todos los bienes inmuebles de un determinado ámbito territorial; actualización, su objeto material es la realidad física; y contiene información relativa a esos bienes inmuebles (cartografía parcelaria y croquis catastral, y físicos, económicos y jurídicos).

En la antigua Roma el catastro se entendía como la contribución que pagaban los nobles y terratenientes según el patrimonio inmobiliario que poseían. Aún se entiende por catastro el registro de los bienes inmuebles (ubicación, dimensiones y uso) y sus propietarios, que se utiliza para establecer el monto de la contribución que se impone sobre los bienes inmuebles según su producción, su renta o su valor, y derechos como servidumbres e hipotecas. Se guardan registros del uso de catastros en Egipto, Babilonia y Grecia utilizándose como base y/o como reserva de datos de las dimensiones y ubicaciones de predios.

El catastro es una de las piedras iniciales en las que se han construido las herramientas estadísticas. Sin hacer un estudio histórico exhaustivo, Oriol (2007) distingue tres períodos: un período inicial que cubre Antigüedad y Edad Media, después del Renacimiento hasta la Revolución Francesa y, finalmente, desde esta última hasta el siglo XIX.

Tabla 1: Una visión general de las prácticas sobre el registro de tierras y el censo desde la antigüedad hasta la Edad Media.

Periodo	Lugar	Soberano	Evento/descubrimiento
Aprox. 4000 a. C.	Caldea		Tabla con el plano y superficie de un grupo de parcelas de la ciudad de Dunghi
3200-2800 a. C.	Egipto		Censo de la propiedad para el cobro de impuestos, con base sobre las propiedades de superficie y rendimiento
2238 a. C.	China	Emperador Yao	Censo de la producción agrícola
2000 a. C.	Egipto	Sesostris	La tierra está dividida en parcelas que determinan la base impuestos a la propiedad
1600-1400 a. C.	Italia		Mapa grabado en una roca plana. Las líneas son corrientes, canales de riego y caminos.
Aprox.1200 a. C.	Israel	Josué	Organización territorial y tribal de Israel. Establecimiento de catastro y la distribución de la tierra entre las tribus (Josué XVIII, 4 - 9).
Aprox. 700 a. C.	Lucania		Catastro 10.000 hectáreas divididas en lotes rectangulares 6 hectáreas cada uno.
Alrededor de 578-535 a. C.	Etruria	Servius Tulius	Catastro de Roma
63 a. C.–14 d.C.	Galia	Augusto	Establecimiento de catastro
77 d.C.	Galia		Catastro de Orange
380 d. C.	Roma	Teodosio I, el Grande	Registro Público: capacidad, tipo y calidad de los bienes por declaración de los propietarios.
645-649	Japón	Era Taika	Fabricación de registros del estado civil y catastro.
1000	India	Raja el Grande	Desarrollo de un catastro
1086	Inglaterra	Guillermo el Conquistador	Fin de la compilación de Doomsday Book, la gran encuesta de Inglaterra
1364-1380	Francia	Carlos V	Organización de "parcelas"
1368-1398	China	Hongwu	Censo de Población y Catastro General

Nota Fuente: Catastros desde la antiguedad al medioevo, (modificada desde Oriol, 2007).

Desde la tabla 1, se observa que a nivel mundial el censo y los catastros eran los instrumentos que permitían al poder del Estado proporcionarse los recursos necesarios para su funcionamiento, tanto para su organización como en su política de Estado.

El control y el conocimiento de las herramientas científicas se propagan durante el Renacimiento y la Revolución Francesa, período de grandes cambios y reformas.

Tabla 2: Catastros de la Edad Media.

Periodo	Lugar	Soberano	Evento/descubrimiento
1427	Florencia		Catastro
1467	Irán	Uzun Hasan	Catastro agrícola
A partir de 1599	Vietnam del Norte	Trinh-Cuong	Elaboración de un catastro
1749	España	Fernando VI	Catastro y Censo

Nota Fuente: Catastros en el Medioevo.

Entre los mapas catastrales se cuentan: 1664 Montauban, 1670 Lausanne, 1713-1740 Prusia (Federico Guillermo I), Cataluña 1716-1718 (Felipe V), 1730 Savoya (Carlos Emmanuel III), 1740 Basilea, 1781-1786 Sicilia (el virrey Caracciolo llega a establecer el catastro).

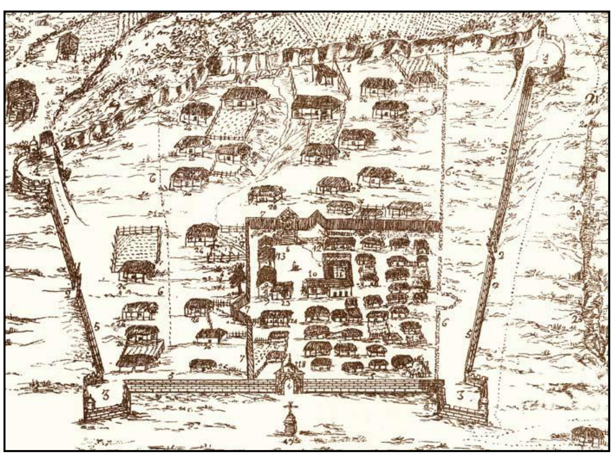


Figura 8: Plano de la Plaza de Arauco, s. XIX, Chile.

En 1807 Napoleón decretó un catastro, que además de ser un instrumento fiscal y administrativo, debía convertirse *en una nueva ley. La elaboración del* catastro comenzó en 1810 y prosiguió, en un primer momento, hasta 1818. Después de una interrupción de 10 años, los trabajos prosiguieron en 1828 para terminarse en 1846.

Hasta nuestros días, el concepto base de catastro sigue siendo el mismo, es soporte de múltiples aplicaciones fiscales y económicas, y ha llegado a convertirse en un sistema de información del territorio rápido, fácil y eficaz, que puede ser consultado por los entes administrativos del Estado y por los ciudadanos que lo requieran.

2.6 Los Censos

Los primeros censos se originan en experiencias relacionadas con el reclutamiento militar y el cobro de impuestos. La presencia de censos se encuentra ya en las civilizaciones más antiguas de la humanidad, como China y Mesopotamia, hace aproximadamente 6000 años. Hasta hoy, el censo de población es una de las principales formas de caracterizar a un grupo de habitantes.

A medida que avanza la humanidad comienzan a aumentar el número de censos. Por ejemplo algunos de los conocidos a través de la Biblia, son: Moisés en el libro del Éxodo señala su interés por saber cuántos hijos de Israel salían hacia la Tierra Prometida; los hebreos realizaron dos censos de su población, que se mencionan en el libro Números; y desde el Nuevo Testamento sabemos que María, a punto de dar a luz a Jesucristo, debe trasladarse con José a Belén durante uno de los episodios de empadronamiento registrados en el Imperio Romano.

En China el emperador Yao, ordenó un censo de la producción en el año 2238 a. C. En Egipto, 1700 a. C. el Faraón Amasis decreta la pena de muerte contra los que no se regían por las declaraciones de su nombre, profesión y medios de vida. En la India del siglo IV a. C., Kautilya, ministro del rey Chandragupta del Imperio Maurya de la India, escribió un tratado sobre perfiles políticos y económicos, y censo de la población técnica. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el 594 a. C. para cobrar impuestos. Es en la Edad Media donde se encuentran estadísticas más sistematizadas; estadísticas demográficas y económicas de los territorios conquistados y luego en los colonizados. Sólo hace cerca de 450 años, a partir del Concilio de Trento en 1563, se obliga a los ciudadanos a inscribir nacimientos, matrimonios y defunciones.

En el medioevo, cada registro de población llevaba implícito un tributo al monarca correspondiente y su condición para la guerra. Los árabes que llegaron a España se contaban entre ellos para conocerse en una situación adversa; cada Estado que empezaba a conformarse hacia la modernidad fue desarrollando capacidades para dimensionarse y comprender cómo se constituía, (INE, 2010).

El antecedente de los censos como hoy los conocemos fue elaborado en la colonia de Nueva Francia, actual Québec, con el recuento de individuos en 1665. En Estados Unidos, el censo de 1790 tuvo como propósito determinar la representación de la población en el Congreso y fue el primero en publicar las listas con la información recogida.

Durante el periodo de los monarcas borbones Carlos III y Carlos IV —por un impulso de control burocrático y administrativo— se procedió al levantamiento de censos de población en los virreinatos de América Latina. Un dato histórico relevante es la preocupación censal de los gobiernos nacionales que, tras la independencia, enfrentaron grandes carencias y dificultades.

2.6.1 El Censo en Chile

En el Chile colonial, el concepto censo en los registros se asocia al tributo que los indígenas, reducidos a encomienda, debían dar a su encomendero por los servicios prestados. De este fondo, se extraía una serie de rentas, para la mantención de las instituciones públicas y el sostenimiento de la Iglesia. Por otro lado, se ha identificado a los censos como un préstamo otorgado por la Iglesia, la cual fue un importante sostén de la economía colonial durante el siglo XVII.

Tabla 3: Empadronamientos durante la Colonia.

Años	Censo
1777 - 1778	Censo de Jáuregui
1784	Censo de Chiloé
1787	Censo Obispado de Santiago
1791-1793-1796	Censo de población indígena infiel

Nota Fuente: Empadronamientos Coloniales, (INE, 2010).

Al entrar a las postrimerías del siglo XVIII, se identifican las primeras encuestas oficiales de población, encargadas y organizadas desde la institucionalidad política, durante un período que podríamos denominar de padrones o pseudo censos. Desde la Gobernación y Capitanía General de Chile, los gobernadores Jáuregui y O'Higgins serán los precursores de la ejecución de estos sistemas de manera más estructurada y dejan testimonio concreto de una obra coordinada con eficiencia.

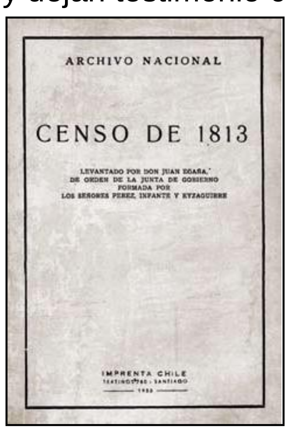


Figura 9: Portada de Censo 1813.

Chile fue uno de los pocos países latinoamericanos que, desde su nacimiento como República, realizó censos de población en forma más o menos sistemática. Desde 1813 en adelante comienza un avanzado y evolutivo proceso de levantamientos censales sucesivos. Sin embargo, los dos primeros, 1813 y 1835, deben ser considerados de forma especial en relación con los siguientes, 1843, 1854, 1865, 1875, 1885 y 1895, dado que recién hacia 1843 existe una institucionalidad acorde a las necesidades de planificación, recopilación y entrega de los datos otorgados por los censos. El marco institucional estará dado por la creación de la Oficina de Estadística y la Ley de Censos, ambas instancias generadas durante el gobierno de Manuel Bulnes.

El Censo de 1813, según cifras poco metódicas, contabilizó una población total del país de 823 685 habitantes. El Censo de 1835 registró 1 010 332 habitantes, y fue la primera vez que se consideraron todas las provincias a nivel nacional.

Aún en su tiempo, el censo chileno no fue reconocido por su seguridad científica. A veces los mismos empadronadores cuestionaron los resultados producidos por su trabajo. Tal como observaba un oficial, "*el resultado jeneral del Censo de 1895 está, a mi juicio, mui lejos de ser la verdadera espresión numérica de los habitantes de la República— en algunos distritos rurales no han sido anotados en los padrones del Censo los DOS TERCIOS de sus habitantes*"[1]. El censo de 1907 se consideró tan defectuoso que apenas fue publicado. La búsqueda de una solución a aquellas deficiencias explica por qué constantemente se ajustaron las metodologías del censo en las primeras décadas del siglo. La intención era mejorar la calidad de los datos producidos y medir con más precisión las capacidades y avances de la población chilena respecto de su productividad económica. (Quay, 2000).


QUINTO
CENSO JENERAL
POBLACION DE CHILE
EL 19 DE ABRIL DE 1875
POR LA OFICINA CENTRAL DE ESTADISTICA EN SANTIAGO.
VALPARAISO.
IMPRENTA DEL MERCURIO.

Figura 10: Portada Censo de 1875, Archivo INE.

Desde su fundación (1843) el Instituto Nacional de Estadísticas chileno, INE, es el encargado de producir, recopilar, analizar y publicar las estadísticas oficiales del país. EL INE aporta información relevante de la actividad económica y social del país, permitiendo conocer en detalle cómo ha crecido la población chilena, el desarrollo cultural y la evolución de la economía, entre otros temas. Esta información es la base para el diseño y evaluación de políticas públicas que involucran directamente a los ciudadanos. Actualmente algunos de los principales productos estadísticos elaborados por el INE son los Censos de Población y Vivienda, Indicadores de Empleo y Sectores Económicos, Índice de Precios al Consumidor (IPC), Encuesta de Presupuestos Familiares, Censos Agropecuarios, además de otras 70 mediciones, (INE, 2010).

2.7 De las coordenadas a los gráficos

Los gráficos quizás son los ejemplos de representaciones de objetos abstractos que más han prevalecido, y fueron inventados a finales del siglo 18, aunque éstos

---

[1] Las mayúsculas son del original. República de Chile, Oficina Central de Estadística. Sétimo Censo jeneral de la población de Chile levantado el 28 de noviembre de 1895, Valparaíso, Imprenta del Universo de Guillermo Helfman, 1900-1904, 2 volúmenes.

probablemente tienen sus raíces en la notación matemática, especialmente el sistema de coordenadas cartesianas, (Tversky, 2001, p.83).

La idea de coordenadas estaba presente en los agrimensores egipcios, pero la primera referencia aparece en la obra de los astrónomos y geógrafos griegos. Hiparco (s. II a. C.) determinó la posición de puntos en el cielo y en la tierra mediante la longitud y la latitud. Los romanos dividían sus ciudades respecto de dos ejes, el decimanus —de este a oeste— y el cardo –de norte a sur—, organizando las vías públicas en un sistema de coordenadas rectangulares.

Entre los geómetras griegos comenzó a desarrollarse la idea de coordenadas dentro de las matemáticas, especialmente en Menecmo (s. IV a. C.) de la Escuela Platónica, quien estudia los lugares geométricos por medio de ecuaciones, aunque sin uso del álgebra; y Apolonio de Perga (262?-190? a. C.) utiliza los métodos en las Cónicas, muy semejantes al pensamiento matemático moderno, de modo que la obra de Apolonio se ha considerado como una anticipación a las geometrías analíticas de Fermat y Descartes en dieciocho siglos. Sin embargo, en la geometría griega no hay trabajos en los que se fije un sistema de referencia a priori con el fin de representar gráficamente una relación expresada de modo simbólico, es decir, las coordenadas, variables y ecuaciones.

Es en la Edad Media, con Nicole Oresme (1313-1382) cuando se da un impulso notable a las coordenadas. Los términos latitud y longitud que utilizaba Oresme vienen a ser equivalentes a nuestras ordenadas y abcisas. Con el fin de describir el movimiento rectilíneo, Oresme introduce la idea de representar gráficamente la velocidad instantánea del móvil en función del tiempo: sobre una recta horizontal lleva graduaciones de segmentos equivalentes al tiempo y sobre ellas eleva segmentos perpendiculares de longitudes equivalentes a la velocidad del móvil en los instantes correspondientes. Oresme parece haberse dado cuenta del principio esencial de que una función de una variable se puede representar mediante una curva, pero no fue capaz de hacer un uso efectivo de esta observación salvo en el caso de la función lineal. Aun así, se ha constatado históricamente que la obra de Oresme influye de modo notable en los trabajos de Galileo y Kepler, (Rico y Castro, 2000).

Con Descartes y con Fermat el método de coordenadas adquiere su estatus definitivo. Sin embargo, ni Fermat ni Descartes utilizan el término “sistema de coordenadas” o la idea de los dos ejes, el de abscisas y el de ordenadas. El término “coordenadas” fue acuñado por Leibniz a finales del siglo XVII.

Tabla 4: Algunos hitos importantes en el desarrollo del gráfico.

Años	Individuo (s)	Desarrollo
3200 a. C.	Egipcios	Sistema de coordenadas para establecer territorios
1000 d. C.	Desconocido	Curvas de órbitas planetarias en una red de tiempo
1350	Nicolás Oresme	Proto gráfico de barras de funciones teóricas
1637	Rene Descartes	Sistemas de coordenadas en Geometría Analítica
1669	Christiaan Huygens	Gráfico de coordenadas para datos de proporción de sobrevida versus edad
1685	Robert Plot	Gráfico de líneas de las lecturas barométricas diarias
1686	Edmund Halley	Gráficos bivariados de lectura barométrica versus altitud
1755	Leonhard Euler	Función definida como cantidad que depende de otra variable cantidad
1760-5	Johann Lambert	Ajuste de curvas e interpolación; medición del error
1765	Joseph Priestley	Series de tiempo para comparar esperanza de vida
1786	William Playfair	Gráfico de Barra
1801	William Playfair	Gráfico Circular

Nota Fuente: Hitos de la graficación, modificado desde Moritz (2006).

Los datos representan, para la gran mayoría de situaciones, números o frecuencias correspondientes a los diferentes términos de la variable estadística estudiada. Los materiales disponibles son esencialmente los de la geometría plana: puntos, segmentos, superficies, los sectores angulares. Estos objetos matemáticos se asocian con magnitudes características para determinar los valores de la toma: para el segmento, será el valor (o medida) de longitud, para las superficies, este será el valor (o medida) de la zona, y para los sectores angular, este será el valor (o grado) ángulo, (Ruiz, 2006).

Playfair es el primero en promover y usar los gráficos; él argumenta que las tablas de valores registran valores numéricos precisos, sin embargo los gráficos tienen un propósito de dar una perspectiva global,

> “La ventaja propuesta por este método, no es dar más exactitud a través de figuras, sino dar más simplicidad y permanencia a la idea del progreso gradual y cantidades comparativas, en diferentes periodos, presentando al ojo una figura, las proporciones a las cuales corresponden la cantidad de las sumas

> que intenta expresarse […] mayor cantidad de información podría obtenerse en cinco minutos que requerir días enteros para poner en la memoria […] una tabla", (Playfair 1801, pp. xi-xiii, citado por Moritz, 2006).

Los gráficos propuestos por Playfair fueron aceptados favorablemente en Alemania y en Francia especialmente por el científico Humboldt, pero no así en Inglaterra, donde la publicación y aceptación de gráficos tardó un siglo después de Playfair aunque propuestos 50 años antes por W. S. Jevons. Como señala Spence (2000), aún había una considerable oposición entre los estadísticos y no hubo adopción general de los nuevos métodos gráficos hasta la segunda mitad del siglo XIX. Un ejemplo de ello son los gráficos de Minard, quien incorpora algunas de las ideas de Playflair en su labor cartográfica y es capaz de crear en 1896 un gráfico conocido como el mejor gráfico estadístico jamás dibujado; el cual mediante una única imagen bidimensional muestra el comportamiento de diferentes variables: movimiento, pérdidas, y temperatura, (Estrella, 2010).

Las representaciones comunes de datos cuantitativos son los gráficos de barra y circulares, junto a diagramas de flujo, árboles, y redes usadas para datos cualitativos. Playfair en Inglaterra y Lambert en Suiza se acreditan como los pioneros en propagar el uso de gráficos para mostrar datos económicos y políticos. Aquellos primeros gráficos del tipo XY con el tiempo en una de sus variables, es aún uno de los tipos de gráficos más comunes en revistas científicas. Desde entonces existen invenciones ingeniosas, como los gráficos polares de Florence Nightingale's sobre la mortalidad en los hospitales, los gráficos de caja y diagramas de tallo y hojas de Tukey, y los campos de estrellas, los árboles cónicos, arboles hiperbólicos, entre otras visualizaciones.

2.8 El origen de la Estadística Descriptiva

El "milagro griego" en el siglo VII a. C. permitió la introducción de la lógica, la democracia y el método científico. El propio Aristóteles (Macedonia 384 a. C., Grecia 322 a. C.) trabajó en la Constitución de Atenas como parte de una colección. Los historiadores han encontrado en este texto datos muy valiosos para reconstruir algunas fases de la historia ateniense. La Constitución de los atenienses fue una obra de un grupo de trabajo dirigido por Aristóteles, y se trata de la primera de una serie de constituciones que el filósofo griego tendría en proyecto escribir con el fin de reflejar enciclopédicamente la cultura legislativa de su tiempo.

En la Constitución de los atenienses, Aristóteles refleja tanto la realidad legislativa de la gran ciudad estado y el contexto en que ésta se fue plasmando a lo largo de la historia, como los principales momentos de la misma en lo que se refiere a distintas innovaciones de tipo político administrativas. La obra muestra, además, el pensamiento heleno acerca de la configuración política y socio cultural de Atenas. El método que se usa en la obra es el descriptivo, similar al usado por Aristóteles en sus obras científicas, combinando lo empírico con lo observacional, y con relevantes contribuciones críticas y valorativas.

Sólo hace unos 230 años, en 1879, Frederic G. Kenyon encuentra en Egipto el papiro que contiene la *Athenaíon Politeía*, la Constitución de Atenas. En su libro señala: “No es exagerado decir que con Aristóteles, el mundo griego pasó de la instrucción oral al hábito de la lectura”.

Es este filósofo griego quien entrega en este tratado de política, directrices de una forma de Estadística Descriptiva:

> *“Al mismo tiempo proporcionaron también a la muchedumbre un sustento fácil, como había sugerido Arístides. La realidad, en efecto, era que los tributos, los impuestos y los aliados daban de comer a más de veinte mil hombres; los jueces eran seis mil; mil seiscientos los arqueros; además mil doscientos jinetes, quinientos miembros de la boulé, quinientos miembros de guarnición en los arsenales de la armada y cincuenta más de guarnición en la acrópolis; las autoridades de la ciudad llegaban a setecientos hombres, e igual era el número de las de fuera; además, luego, cuando entraron en guerra dos mil quinientos hoplitas, veinte naves guardacostas, otras naves encargadas de transportar los tributos..., dos mil hombres designados por sorteo; estaba también el pritaneo, los huérfanos y los carceleros; toda esta gente vivía a costa de la comunidad”.*

Con posterioridad, será Tomás de Aquino en el siglo XIII, quien da a las ideas de Aristóteles la condición de doctrina oficial de la iglesia. La influencia considerable de las ideas de Aristóteles y sus escritos inspiraron los primeros estudios de las estadísticas en Europa occidental hasta el siglo XVI; a partir de ese momento, Galileo, Pascal y Torricelli desafiarían el sistema aristotélico con datos experimentales. Como se señalaba anteriormente, en la Edad Media se encuentran estadísticas más reguladas, más allá de los cronistas de la conquista y la colonia, existían encargos relativos a la demografía y la economía de los territorios.

La Estadística como disciplina independiente se inició a mediados del s. XVII. En Alemania se creó la primera cátedra en la escuela universitaria según una orientación impresa por Vito de Seckendorff (1626, 1692) y Herman Conring (1606, 1681). Su discípulo Goodfredo de Achenwall de la Universidad de Gotinga (1749), le dará el nombre de Estadística (Statistik) y la separa de la Sociología.

A pesar de que, desde hace muchos siglos, se han coleccionado conjuntos de datos numéricos, particularmente censos y catastros, el origen de la Estadística en su sentido actual es reciente y se puede situar en el trabajo de John Graunt (1662) "Natural and Political Observations on the London Bills of Mortality". Graunt fundó el registro universal de nacimientos, matrimonios y muertes de Inglaterra, por encargo del Estado y otros países europeos siguieron este ejemplo. Aunque, no fue hasta el siglo XIX cuando el término Estadística adquiere el significado de recolectar y clasificar datos, concepto germano introducido en Inglaterra por John Sinclair.

La idea de una oficina central de estadísticas tuvo que esperar hasta Leibniz en Alemania alrededor de 1685. A partir de ahí, el análisis estadístico y la modelización probabilística se aplicó a un número creciente de fenómenos científicos y humanos. Durante el siglo XIX las colecciones de datos y su análisis tenían propósitos políticos y la modelización estadística de fenómenos científicos se desarrolló rápidamente.

Adolphe Quetelet (1796-1874) aplica la estadística a las Ciencias Sociales, introduce la noción del "hombre promedio", *homme moyen*, como un medio de entender los fenómenos sociales complejos como tasas de criminalidad, matrimonio o de suicidios. Actualmente el índice de Quetelet o índice de masa corporal es utilizado internacionalmente en el área de salud, para determinar la obesidad. Es Quetelet quien aporta con una metodología estadística de carácter científico, (Estrella, 2008).

Regnier (2000, p. 134) indica que el desarrollo de la Estadística hasta el s. XIX estableció un principio de compensación, en cuanto a la larga data de la influencia de las causas regulares y permanentes para atenuar las causas irregulares y fortuitas. Y para este autor, esta situación se convierte en un obstáculo epistemológico a la comprensión y al desarrollo de la Estadística, pues se diseñan algoritmos de cálculo que neutralicen las fluctuaciones pero a la vez esta visión limita la generalización necesaria para la conceptualización (por ejemplo, la media o la probabilidad).

Hasta llegar al siglo XX solo existía la Estadística Descriptiva, que, a pesar de sus limitaciones, hizo grandes aportes al desarrollo de las ciencias experimentales. A partir de esa época, comienza la inferencia estadística clásica, con los trabajos de Fisher, Pearson y sus colaboradores y progresivamente se incorporaría la contribución de la escuela bayesiana, (Cobo, 2003). El rápido desarrollo de la Estadística en el s. XX como ciencia y como herramienta en la investigación, ha sido impulsado tanto por la técnica y la vida profesional, como por la expansión de computadores y por las vastas y rápidas posibilidades de comunicación.

Hace más de 40 años, las distribuciones de frecuencias constituían una forma especialmente compacta y útil de organizar y presentar los datos, y por lo tanto de resumir. Es el concepto de frecuencia empírica el que decanta a la noción más teórica de distribución de probabilidades. Y serán las distribuciones de probabilidad los bloques fundamentales desde los cuales se construirán las teorías de Probabilidad y Estadística, (Estrella, 2008).

2.9 Los orígenes de la Probabilidad

En todas las civilizaciones se utilizaban aparatos y juegos de azar. Los dados cúbicos más antiguos conocidos, hallados en tumbas egipcias datadas como anteriores al 2000 a. C., no son de tamaño uniforme, ni en el material ni en la forma de numerar sus caras (si bien en muchos de ellos los números de 1 a 6 están dispuestos de forma que las caras opuestas sumen 7, igual que en los dados modernos). Sin embargo, se conservan dados de marfil muy antiguos en el Museo de Antigüedades del Cairo que están muy bien equilibrados.

Figura 11: Dado en hueso, 3000 a. C.

El dado más antiguo descubierto hasta la fecha pertenece a un set de juego (backgammon) descubierto en Persia, actual Irán, y tiene 5000 años de antigüedad. Los dados se hacían originalmente de hueso, específicamente del hueso astrágalo del talón de animales que tiene una forma tetraédrica. Algunas culturas aún usan estos huesos para juegos de azar. El juego con dados era popular en la antigua Grecia, y en Roma.

Figura 12: Dado icosaedro en piedra, s. II d. C.

Existen características poco usuales en el desarrollo histórico de la probabilidad en comparación a otras teorías matemáticas tales como la geometría o aritmética. Un enfoque matemático de la probabilidad empezó a surgir hace poco más de trescientos años, mucho después que el hombre tuviera las primeras experiencias con el azar. Un gran número de paradojas acompaña el desarrollo conceptual indicando la disparidad entre intuiciones y enfoques formales. Un hito importante fue abandonar la tarea de formalizar una interpretación específica y concentrarse en estudiar la estructura de la probabilidad.

La teoría de probabilidad es una disciplina de la matemática que fundamenta la Estadística como una lógica y una metodología para la medición y el estudio de la incertidumbre, en la planeación e interpretación de la observación y la experimentación. La escuela probabilística se origina en Francia en los problemas de juegos de azar planteados a Blas Pascal, quien inicia una correspondencia con Fermat, y cuya resolución impulsó el cálculo de probabilidades, área en el que se destacan matemáticos de renombre como Laplace, Bernoulli y Gauss, entre muchos otros. El libro *Theorie Analitique des Probabilités* de Pierre-Simon Laplace fue el primer tratado serio de Probabilidad. También hay antecedentes de los orígenes de la teoría de la probabilidad en un corto artículo escrito por Christiaan Huygens en 1657, quien fue un físico, geómetra y astrónomo holandés. Previamente, Cardano y Galileo habían hecho cálculos de probabilidades numéricas, de diversas combinaciones de dados, (Galbiati, 2010).

Hilbert, en el Congreso Matemático de París de 1900, formuló un programa para la investigación matemática entre cuyas tareas principales estableció la de axiomatizar satisfactoriamente la probabilidad y la mecánica estadística. Ya que algunas nuevas leyes físicas sólo podían describirse en términos probabilísticos (por ejemplo, el segundo principio de la termodinámica), es la teoría de la probabilidad la que desarrolla un importante papel conceptual en Física durante fines del s. XIX. Las aplicaciones estadísticas, especialmente la regresión y la correlación, culminaron en desarrollos biométricos, (Sáenz, 1999).

En 1919 von Mises fue uno de los pioneros en el trabajo de axiomatización y se basó en la interpretación de la probabilidad como convergencia de frecuencias relativas, basado en el teorema de Bernoulli. Su enfoque fue complicado y tenía muchos problemas filosóficos. En 1933 es Kolmogorov quien finalmente formula un sistema de axiomas de probabilidad y deduce los teoremas que fueron reconocidos inmediatamente. Su enfoque aplicó los principios extraídos de la teoría de la medida que habían ganado importancia al probar varias generalizaciones del teorema central del límite. Aunque el enfoque de Kolmogorov no clarificó lo que es la probabilidad, elaboró las propiedades de estructura de la probabilidad. Es preciso señalar que este enfoque fue pensado principalmente como una justificación de la interpretación frecuencialista de la probabilidad (Kolmogorov, 1976, citado por Sáenz, 1999).

Sáenz (1999) al dar una breve panorámica del proceso promotor de la Probabilidad, señala “La teoría de probabilidad ha sido capaz de crear sus propios problemas y generar sus propios programas de investigación en forma tardía; históricamente, el estímulo vino de otras disciplinas: en el s. XVII el establecimiento de los seguros y anualidades impulsaron a la estadística, en el s. XVIII la teoría de la medida se desarrollaba con fuerza sobre todo al servicio de la astronomía, en el s. XIX se creaba la biométrica para análisis de datos biológicos, en el s. XX las necesidades de la agricultura y medicina motivan el desarrollo de la teoría probabilística; con todo, esta explicación no tiene en cuenta que algunas destrezas de cálculo de anualidades ya eran utilizadas en la época romana”.

Los hindúes y árabes tenían un buen sistema de numeración, y también desarrollaron antes terminología y cálculos probabilísticos. Pero es el Álgebra Combinatoria la que impulsa el desarrollo de la Probabilidad, que comienza con la publicación de *Ars Combinatoria* por Leibniz en 1666. Epistemológicamente, las técnicas combinatorias fueron necesarias para la aparición de la probabilidad, y en esa misma perspectiva Piaget e Inhelder (1951) establecen que es necesario el esquema combinatorio, que forma parte del pensamiento intelectual más avanzado, para poder comprender el concepto de probabilidad.

2.10 Etimología de Estadística y de Probabilidad

Hasta aquí hemos presentado a grandes rasgos el devenir de la construcción de los objetos estadísticos, parece pertinente al cerrar este capítulo detenerse en los significados de Estadística y de Probabilidad.

Es en 1749 que el alemán Gottfried Achenwall usa el término Statistik en su libro titulado *Staatswissenschaft der vornehmen Europäischen Reiche und Republiken*. Este economista originalmente designó la palabra estadística para el análisis de los datos de un gobierno, definiéndola como la "Ciencia del Estado".

La etimología entrega una historia un poco más compleja, como se observa en el diagrama de la figura 13, (Robert, 1993, citado por Oriol 2007):

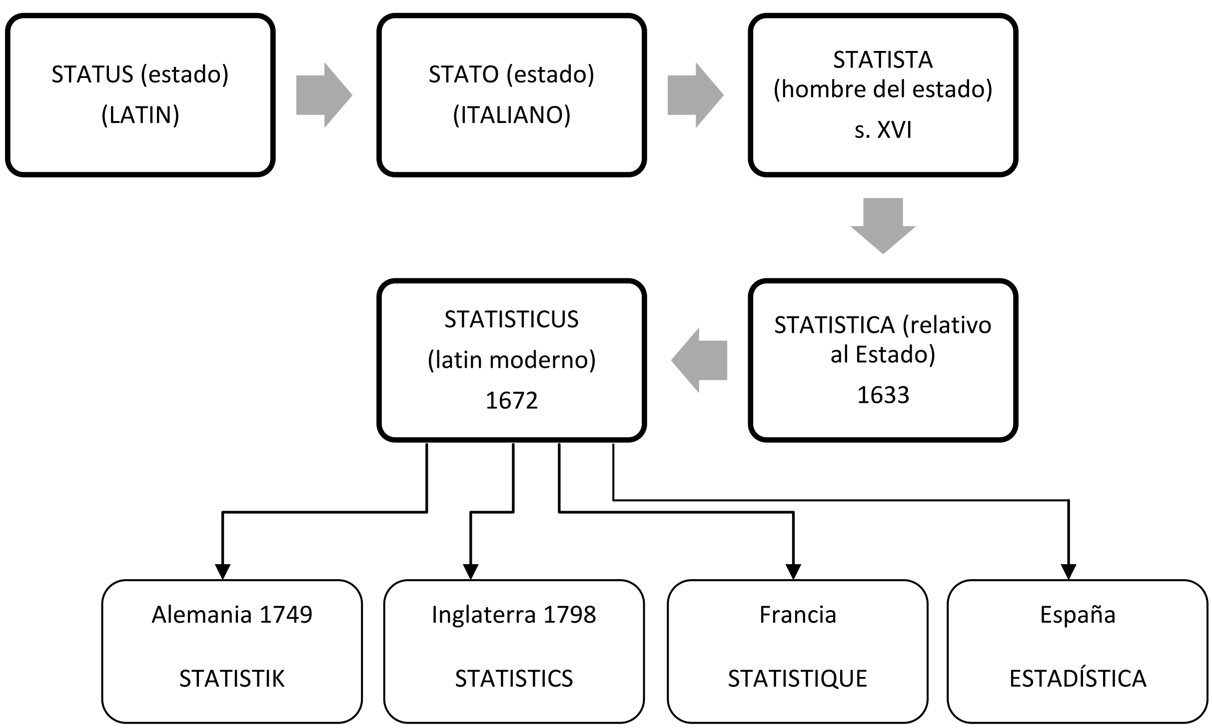


Figura 13: Etimología de la palabra Estadística.

Hay un cambio de significado desde el nombre inicial, desde la "Statistik" alemana referida al Estado. En Inglaterra se le llama "Statistics" (1798) adquiriendo el significado de recolectar y clasificar datos, posteriormente en Francia (1832) toma el sentido de "conjunto de técnicas de interpretación de la matemática aplicada a fenómenos", (cita de Oriol, 2007). En 1892 el nombre designa entonces al objeto de la Estadística: "conjunto de datos numéricos concernientes a una misma categoría de hechos", (Oriol, 2007, p. 28).

En su trabajo doctoral, Oriol muestra una secuencia del desarrollo etimológico de la palabra azar, levemente modificada en la figura 14:

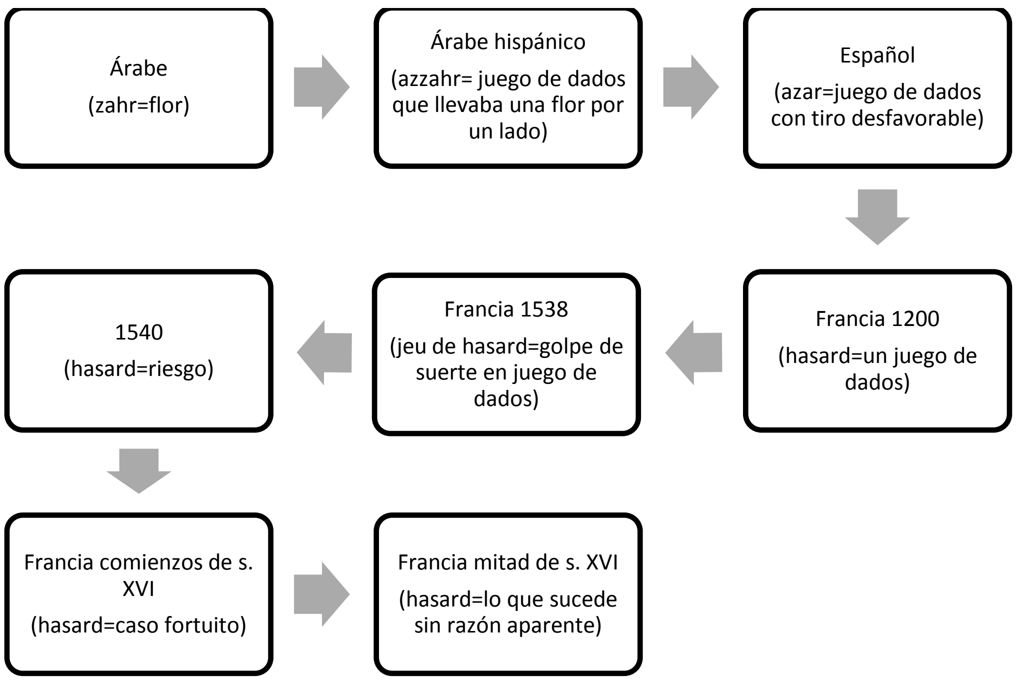


Figura 14: Etimología de la palabra Azar.

Si bien inicialmente y por miles de años se desarrolla la Estadística Descriptiva, sólo hace pocos siglos se desarrolla la idea de azar. Al parecer la comprensión del azar requiere relaciones más complejas de los seres humanos, por ejemplo requiere la idea consensuada de verdad, de certeza y la necesidad de ganar comprensión en situaciones fuera de la certeza.

Hubo de abrirse un cambio de paradigma para que lo probabilístico tomara sentido, Coutanson (2010, p. 27) rescata un juego de frases de cinco escritores diferentes que señalan, “Acabamos de terminar un siglo de agitación de conceptos. La mayoría de las palabras utilizadas para describir y explicar procesos que tienen lugar a nuestro alrededor han cambiado de sentido. Ahora sabemos que la realidad es inaccesible […], que el futuro es definitivamente imprevisible […], que la ignorancia y la incertidumbre son los motores del descubrimiento […], que la oposición entre el tiempo y la eternidad se convierte en una articulación fecunda […], que la duda es un paso necesario […]”

CAPITULO 3

ANTECEDENTES SOBRE REPRESENTACIONES

3.1 Introducción

En este capítulo se revisan algunos antecedentes respecto a la noción de representación, situando la perspectiva en algunos investigadores franceses representacionistas, aunque sin abordar la gran complejidad de factores relacionados con esta noción.

Posteriormente se profundiza en la representación gráfica, exponiendo los procesos fundamentales en la construcción e interpretación de representaciones gráficas[2] y algunos conceptos asociados a los procesos; y se precisa el concepto de transnumeración relativo a la Educación Estadística.

3.2 La Noción de Representación

El conocimiento humano es el núcleo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y dichos procesos tienen como finalidad el incremento de la comprensión sobre un área determinada. La noción de representación es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, y constantemente ha sido objeto de análisis y crítica. La tradición racionalista ha postulado una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto, a la que llama representación.

El continuo tratamiento de la noción de representación a través de la historia de la filosofía y de la ciencia, muestra la riqueza de sentidos e interpretaciones que tiene este concepto, como asimismo su importancia y complejidad. A modo de breve reseña, recordamos primero a Platón, quien postuló que nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas, a las cuales tenemos acceso indirectamente; Descartes propone admitir exclusivamente “aquello que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviera motivo alguno para ponerlo en duda”; para Kant no hay otro sujeto más que el que piensa y no hay otro objeto cognoscible que el que obedece a las exigencias de la representación; para Husserl el objeto es lo representado por una representación, y diferencia los aspectos subjetivos y objetivos de las representaciones; y Wittgenstein muestra un giro reflexivo, transforma el problema kantiano acerca de cómo experimentamos los objetos en el problema a cómo representamos o describimos la realidad, y por lo tanto representamos la realidad por la construcción de modelos, (Rico, 2009).

[2] En este trabajo se concibe la representación gráfica como un campo más amplio (diagramas, tablas, entre otras) que el concepto de gráfico, considerando este último como la construcción misma.

3.3 Representación y Esquema según Vergnaud

Piaget distingue el espacio perceptivo o sensomotor del espacio representativo. Para Piaget, la representación prolonga en cierto sentido la percepción, y es una acción interiorizada que se produce en etapas graduales. Así, a la actividad sensomotora ligada a la percepción, le sigue la acción evocada después de realizada, hasta conseguir anticipaciones fragmentadas de acciones posteriores posibles, en torno a la etapa de las operaciones concretas (7-8 años a 11-12 años), cuando las acciones interiorizadas se estructuran en esquemas que se componen y coordinan alcanzando la reversibilidad, se da lugar a un sistema propiamente operatorio.

Entre las teorías que consideran a las representaciones internas como constituyentes del conocimiento de los sujetos, destaca la elaborada por Vergnaud (1998). Su teoría de los campos conceptuales[3] fue desarrollada también a partir del legado de Vygotsky. Vergnaud, al realizar su tesis con Piaget, adapta la noción de esquema piagetano, y propone una visión alternativa a los "sistemas de representación". Además de incluir los elementos lingüísticos atribuye un papel esencial a la acción del sujeto en la constitución de los esquemas cognitivos: "Un esquema es la organización invariante de la conducta para una cierta clase de situaciones", “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”. Además, un esquema matemático reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto[4] constituyentes de los esquemas operatorios.

Un esquema es una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. En la aplicación de estos esquemas se ponen en juego conceptos y teoremas matemáticos; un ejemplo entre los esquemas perceptivos gestuales en matemática, es dibujar un gráfico o un diagrama; dibujar un gráfico en el plano cartesiano implica al menos el concepto de correspondencia uno a uno y el concepto de número cardinal; la utilización de la regla y/o el compás implica al menos el concepto de ángulo recto y el teorema de que la simetría conserva ángulos, (Godino, 2002).

En la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, el autor establece el estatus de una representación al definir un concepto como una tripleta formada por: el

[3] Teoría cognitivista que pretende proporcionar un marco coherente y principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente referidas a las ciencias y las técnicas.
[4] Los conocimientos contenidos en los esquemas se les designa por la expresión “concepto-en-acto” y “teorema-en-acto”, también designados por la expresión más global de “invariantes operatorios”; y corresponden a los conceptos y teoremas que, sin ser explícitos, dirigen las conductas del sujeto.

conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto (el significado), y el conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) usadas para presentar el concepto (el significante).

Para Vergnaud hay construcción de un "invariante operatorio" cuando el alumno muestra por comportamientos y por procedimientos que cualquiera sea el significante utilizado en las situaciones, él hace funcionar el significado correspondiente, (por significado entiende al concepto desde el punto de vista del contenido; y por significante entiende una representación de ese concepto, como el dibujo, el nombre, la notación). Vergnaud (1990) argumenta que el homomorfismo entre lo real y la representación no debe buscarse en primer lugar al nivel de los simbolismos, sino al nivel de los invariantes operatorios contenidos en los esquemas.

3.4 Representación según Duval

Desde un enfoque semiótico, el profesor Raymond Duval ha trabajado sobre la noción de representación y la comprensión de los objetos matemáticos[5] desde comienzos de la década de los ochenta. Duval, afirma que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, e indica que las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un sujeto para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas accesibles a los demás.

La contribución teórica de Duval se inscribe dentro de la línea de investigación que postula una naturaleza mental —las representaciones internas— para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales —noesis[6]— al lenguaje en sus diversas manifestaciones. La disponibilidad y utilización de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos, pero la producción y aprehensión de representaciones materiales —semiosis— no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza, (Cobo 2003, Baillé y Vallerie 1993).

Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. El progreso de los

[5] Chevallard (1991, pág. 8) define objeto matemático como: "un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos, …), es decir el registro de la escritura".

[6] Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.

conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el lenguaje natural. La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso de una pluralidad, al menos potencial, de sistemas semióticos, y de su coordinación por parte del sujeto, (Duval, 1999).

Duval plantea que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación. El autor especifica que para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: (1) la formación de una representación identificable como una representación de un registro dado, (2) el tratamiento de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada, siendo el tratamiento una transformación interna a un registro, y (3) la conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Se conforma así la terna representar, transformar, y convertir.

Es esta noción semiótica de registro de representación la que se asume en esta sección de la tesis. Los registros como medios de expresión y de representación caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos; ya que un registro está constituido por signos —trazos, símbolos, íconos…— y estos signos asociados al contexto y pertenencia de una misma red semántica. Asimismo se tratará con los registros: escrito (el lenguaje natural llevado al texto), numérico, tabular (valores numéricos organizados en una tabla de valores), gráfico (representación en el plano cartesiano).

Duval (1999) clasifica las representaciones en conscientes y no conscientes: las conscientes están al alcance de la percepción, en cambio las representaciones no conscientes no se encuentran disponibles para la percepción del individuo. El autor también propone que hay representaciones internas y externas: las externas son observables y pueden ser expuestas públicamente, y las representaciones internas no pueden ser observadas públicamente. Como se ha señalado, para Duval las representaciones externas son representaciones generadas a través de un sistema de signos, es decir, son representaciones semióticas, y éstas a su vez pueden ser interpretadas por todos los sujetos capaces de interpretar ese sistema de signos. Este autor distingue por combinación tres tipos de representaciones: mentales, semióticas y computacionales, (ver tabla 5).

Tabla 5: Tipos de representaciones según Duval (1999).

	Interna	Externa
Consciente	Mental: tiene una función de objetivación.	Semiótica: presenta las funciones de objetivación, expresión y tratamiento intencional
No Consciente	Computacional: su función es el tratamiento automático o casi automático.	

De acuerdo con Duval las representaciones externas permiten observar el objeto a través de la percepción de un conjunto de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos) que poseen el valor de significantes (figuras, esquemas, expresiones simbólicas, lingüísticas, gráficos, etc.). Además, postula la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas, (Rico, 2009). La representación externa juega, desde este punto de vista, una doble función: actúa como estímulo de los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y como expresión de conceptos e ideas que poseen los sujetos que las utilizan (Castro, 2005).

Independientemente de las diferentes representaciones del objeto matemático, Duval establece que lo más importante sigue siendo el objeto matemático representado: “La distinción entre un objeto y su representación es pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas”; sin embargo, agrega: “No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias”, (Duval, 1999). El autor plantea una paradoja cognitiva del pensamiento matemático: “Por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”.

Los procesos de pensamiento en las matemáticas se basan en dos tipos muy diferentes de las transformaciones de las representaciones. Incluso si un registro único de representación es suficiente desde el punto de vista matemático, desde el punto de vista cognitivo, la aprehensión del objeto implica la movilización simultánea de al menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar en cualquier momento de un registro a otro. “La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión”, (Duval, 1999).

El mismo autor afirma que “la diversificación de las representaciones semióticas (externas) de un mismo objeto aumenta la comprensión conceptual de los sujetos, pues la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas”, (Duval, 1999). Los conceptos matemáticos pueden expresarse a través de varios sistemas de representación específicos, cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático –estadístico— proporciona una caracterización diferente de dicho concepto. Cada sistema de representación destaca alguna propiedad importante del concepto representado y dificulta la comprensión de otras propiedades.

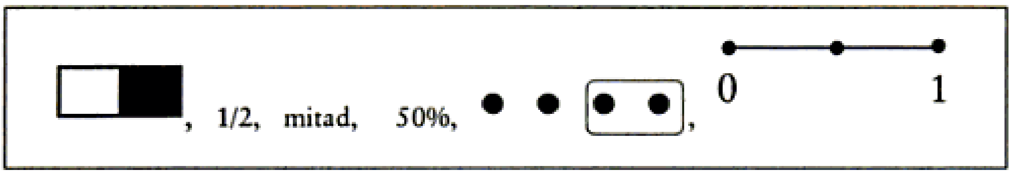


Figura 15: Representación del concepto un medio.

En la primera representación de la figura 15, el rectángulo destaca su partición en dos partes iguales; la segunda sugiere la idea de cociente asociada a la fracción; en la tercera, el término “mitad” destaca la igualdad de las dos partes en que se ha dividido el todo; la cuarta representación hace patente la consideración de tomar el valor 100 como unidad; en la quinta expresión se destacan dos de cuatro unidades; y en la sexta, se indica un punto equidistante de 0 y 1 en la recta numérica, (Castro E. y Castro E., 1997). Estas representaciones no son exhaustivas, pues también se puede considerar 0,5 ó $5*10^{-1}$, o —evaluada en un punto— el registro del lenguaje algebraico $\{x \in Q^{+} / 2x-1=0\}$ en la escritura de la teoría de conjuntos.

El uso de registros de representación semiótica es distintivo del pensamiento humano, y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento. Duval (1999) sostiene: “Un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus traducciones mutuas, parece ser lo necesario para favorecer tal coordinación”. Duval (2006) afirma que el verdadero desafío de la educación matemática es primero desarrollar la capacidad de cambiar de registros de representación.

3.5 Procesos Vinculados a las Representaciones

Algunos autores sostienen que los beneficios que ofrecen las representaciones gráficas al organizar la información por localización pueden ayudar sólo a los expertos, quienes entienden completamente la semántica de dichas representaciones. Por otra parte, posiblemente el lenguaje gráfico hace énfasis en un tipo de representación que está severamente limitado en términos de la cantidad de abstracción que puede utilizarse.

Otros investigadores argumentan que las representaciones gráficas son menos expresivas que las representaciones constituidas por sentencias cortas y que la información expresada por estas últimas es procesada más eficazmente, sosteniendo que en las representaciones constituidas por sentencias es posible encontrar interrelaciones no especificadas y difíciles de hallar a partir de una gráfica, (Cox, 1999, citado por García 2005). Las representaciones gráficas tendrían la característica de comprimir ciertas clases de información, lo que las hace menos expresivas de la abstracción que las representaciones constituidas por frases. De acuerdo con esto, una gráfica sólo representa un estado del asunto y al menos algunos aspectos del mismo, aunque las inferencias realizadas a partir de ella son más tratables porque la información que presentan es más específica.

Algunas veces las representaciones gráficas, y en especial las imágenes, son utilizadas como argumentaciones visuales y evidencias de hechos no tan evidentes, y pueden generar interpretaciones superficiales en las cuales no hay espacio para la reflexión, el pensamiento crítico, como tampoco la discusión de los supuestos.

Postigo y Pozo (2000, citado por García 2005) observan que cuando el sujeto interpreta un gráfico no sólo está influido por su conocimiento sobre los gráficos y sobre la situación representada, sino que también lo está por factores como: la estructura del gráfico (el formato o tipo de representación, —líneas, sectores, barras—, así como del tipo de escala y las etiquetas usadas); la estructura numérica, es decir, el número y tipo de variables —nominal, ordinal, intervalo— y la relación entre ellas —lineal, tendencias, interacciones—; el contenido del gráfico, es decir el contenido del fenómeno representado; y la tarea y el contexto en el que se presenta, pues éstos factores influyen en las demandas de procesamiento del gráfico, como identificar, explicar, predecir, entre otras.

Por otra parte, factores como las diferencias individuales, influyen en la ejecución de las tareas de construcción e interpretación de representaciones gráficas. Se ha encontrado que sujetos con diferente habilidad espacial difieren en sus estrategias para realizar una tarea de comparación y verificación entre un dibujo y una frase. Riding y Douglas (1993, citado por García 2005) han clasificado a los sujetos en visualizadores y verbalizadores sobre la base de pruebas psicométricas; aquellos que utilizaban más diagramas en sus respuestas eran visualizadores y aquellos que utilizaban textos eran verbalizadores. Ma (1999) señala en su estudio sobre la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU; que todos los sujetos —profesores— que presentaron una idea no válida, sólo dieron justificaciones verbales, en cambio, los que dieron justificaciones más rigurosas desarrollaron propuestas inteligentes con justificaciones simbólicas.

3.5.1 Traducciones entre distintas representaciones

El proceso de traducción (Espinel et al., 2009) se refiere al intercambio de información entre gráficos y tablas o texto, y sus posibles relaciones. Las relaciones entre estas distintas representaciones, pueden consistir en describir los datos de una tabla en forma de texto o interpretar un gráfico a un nivel descriptivo con comentarios sobre su estructura, de forma de traducir entre distintas representaciones los datos estadísticos: de texto escrito a gráfica, de tabla a gráfica, de gráfica a texto escrito, de gráfica a tabla, de texto escrito a tabla, y de tabla a texto escrito.

Estos autores encuentran que las traducciones más difíciles son aquellas en las que aparecen el diagrama de tallo-hoja y el gráfico de caja (un resumen de éstos puede verse en Anexo 9); y el que resulta más fácil a los estudiantes es el gráfico de puntos. Y afirman que la mayoría de los profesores en formación inicial no conocen las gráficas mencionadas.

Las variantes texto a texto, tabla a tabla, y gráfica a gráfica, en términos de Duval, corresponderían a un tratamiento dentro del mismo registro semiótico. Por ejemplo el ítem 8 del instrumento de esta investigación referido a sondeo electoral, trabaja en un mismo registro, un ítem construido se presenta en el registro escrito y su respuesta se da en este mismo registro; asimismo, una tarea que permita distinguir desde un gráfico circular su correspondiente gráfico de barra apilada al 100%, o un pictograma a gráfico de barras, son tareas que pueden presentar interesantes traducciones de registro gráfico a registro gráfico.

3.5.1.1 Proceso de traducción de Tablas

Las tablas parecen ser la forma más simple de organización y comunicación de información. Se han convertido en un medio pedagógico desde los primeros niveles escolares. Pero su simplicidad resulta engañosa, pues tablas de diferentes temas no funcionan ni se leen de la misma manera.

Duval (2003) estudia la variedad de posibles tipos de tablas, las funciones cognitivas que cumplen y los problemas educativos que plantea su uso. En lo que respecta a la organización de la tabla, muestra que su unidad básica es una lista y no una celda, que no todas las listas tienen el mismo estatus dentro de la tabla, y que las posibilidades de tratamiento de los datos cambian según se acepte o no la posibilidad de una celda vacía. Así, Duval (2003) propone una clasificación de los diferentes tipos de tablas en relación con el requerimiento cognitivo que demanda su construcción. En cuanto a la comprensión de las tablas, muestra la existencia de dos niveles: uno centrado en el interior de las celdas, y otra centrado en la construcción de los márgenes de la tabla.

En la enseñanza de este tipo de representación, los profesores deben tener en cuenta que algunas tablas se limitan a la yuxtaposición de listas mientras que otras son el cruce de esas listas, (Coutanson, 2010). Otro punto importante develado por Duval (2003), es que las tablas no son representaciones autónomas como aquellas representaciones que privilegian la visualización, pues las tablas necesariamente articulan explícita o implícitamente las representaciones de otro registro. Esta falta de autonomía obliga a leer una tabla como representación de un registro distinto, y es esa conversión la que justifica la manera de leer (lectura vertical/horizontal, o diagonal, o ambas). Este autor destaca que la tabla se diferencia del registro textual pues elimina la organización sintáctica de las frases, y que se diferencia de los planos o los gráficos a pesar de que su disposición permite una localización bidimensional, pues no permite una lectura similar.

3.5.1.2 Proceso de traducción de Tablas de Doble Entrada

Una tabla de doble entrada sirve para presentar la distribución conjunta de dos variables estadísticas. Están compuestas por filas (horizontales), para la información de una variable y columnas (verticales) para la información de otra variable. Estas filas y columnas se intersectan en celdas que se completan con las frecuencias de cada combinación de las variables analizadas. En su expresión más simple, (ver tabla 6), las tablas de contingencia tienen solo 2 filas y 2 columnas (tablas de 2x2), cuando las variables poseen sólo dos categorías.

Tabla 6: Tabla de 2x2 con celdas completadas.

	A	no A	Total
B	a	b	a+b
no B	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	a+b+c+d

La investigación didáctica sobre las tablas de contingencia se ha enfocado en analizar la capacidad de diversos tipos de estudiantes para identificar la asociación o relación estadística entre dos variables, A y B, a partir de los datos presentados en este tipo de tabla, tanto en su forma lógica de compleción como la lectura que se hace de ellas.

Una primera estrategia incorrecta al completar la tabla de 2x2 es analizar solo los casos favorables positivos (intersección de A y B, celda con "a"), y completar la columna de la categoría A sólo con "a", o asociar el favorable negativo (celda con "d" con el favorable positivo (celda con "a") y completar sólo con "a". Una estrategia incorrecta de lectura es comparar las celdas dos a dos. Una vez admitido que también los casos d (ausencia-ausencia) son favorables a la existencia de asociación, usarían sólo los datos de una fila o una columna, (Estrada y Díaz, 2006).

En Díaz (2005) y Estrada y Díaz (2006) se muestra la complejidad de la tabla de doble entrada a través de un análisis semiótico. Este análisis detalla los objetos matemáticos implícitos al interpretar una tabla doble y los principales conflictos semióticos en la tarea, incluyendo la forma en que se relacionan en el cálculo de probabilidades. Entre las conclusiones del segundo estudio citado se encuentra "Dada la frecuente aparición de este tipo de tablas en la prensa, en Internet y en el material profesional del profesor, así como la necesidad de toma de decisiones a partir de ellas, consideramos que la enseñanza ha de prestar más atención al desarrollo de la capacidad de lectura correcta de tablas estadísticas en los futuros profesores".

Piaget (1955, citado por Duval, 2003) mostró que la posibilidad de construcción o desarrollo de cierto tipo de tablas es relativamente tardía en el desarrollo de la inteligencia en los niños: está ligada a la aparición de estructuras operativas formales, es decir, a la aparición de enfoques combinatorios.

Concluimos esta breve mirada sobre las tablas de doble entrada destacando la afirmación de Coutanson (2010, p. 146), "la estructura de una tabla de doble entrada representa en el sentido de Gérard Vergnaud, un campo conceptual a explorar, tanto de parte de los profesores como de los estudiantes".

3.5.2 Proceso de Construcción de Representaciones Gráficas: La variable

La noción de variable es un concepto esencial en matemática, y también es fundamental para la comprensión de las representaciones gráficas. El concepto de variable tiene, al menos, tres interpretaciones distintas: una primera es aquella que la concibe como algo relativamente estático, como un instrumento para la generalización y la descripción de modelos, asociándola por lo general a símbolos algebraicos, como las letras; la segunda interpretación del concepto de variable la concibe como algo dinámico, que representa e incluye el cambio, la variabilidad y las transformaciones simultáneas de un factor o elemento dentro de un fenómeno estudiado, este segundo enfoque asocia a la variable con una representación gráfica o una notación funcional (Janvier, 1981); la tercera interpretación del concepto de variable la define de acuerdo con su dominio dentro de una relación funcional

(Freudenthal 1983; Schoenfeld y Arcavi 1988, ambos citados por García 2005), y el dominio de una variable está determinado por la situación a la cual ella se refiere, y es ésta la que determina cuál es la unidad adecuada y el tipo de unidad, y es la unidad en la cual se mide la variable (categórica, ordinal, intervalo, o de razón) la que determinará si es discreta o continua (Janvier, 1983).

Bergamini (1963) argumenta que el sistema de coordenadas cartesianas, al atrapar y sistematizar los cambios que se producen en las interrelaciones entre magnitudes, origina los conceptos de variable y de función. De esta forma, si un valor *X*, referido a la cantidad de una magnitud determinada está relacionado con un valor *Y*, y esta relación puede ser representada a través de una ecuación o un gráfico, entonces las magnitudes a las que se refieren los valores *X* e *Y* pueden clasificarse como variables. Es decir, al cambiar el valor de una de las magnitudes cambia el valor de la otra, presentándose de esa manera una relación funcional; en dicha relación, la variable que cambia de valor como consecuencia del cambio de valor de la otra variable recibe el nombre de función de dicha variable.

De acuerdo a la forma que tome la variable pueden establecerse tres tipos de dominio. Si la variable es discreta el dominio podría ser de tipo categórico (un grupo finito de valores no ordenados), o de carácter ordinal (un grupo finito de valores ordenados); y si la variable es continua, el dominio se correspondería con un grupo no finito ordenado de valores, como es el caso de las proporciones. En los gráficos dimensionales las variables pueden ser de ambos tipos, o discretas o continuas, o ser una de ellas discreta y la otra continua. Un gráfico producto de mediciones experimentales puede incluir solamente un número finito de puntos discretos si sólo se refiere a esos datos, en cambio este mismo gráfico puede contener un número infinito de datos en un continuo si se refiere a la representación global del fenómeno. El primero de estos gráficos se produce en la Estadística Experimental, mientras que el segundo se encuentra en la Estadística Inferencial.

Una variable cuyo valor numérico está determinado por el resultado del experimento aleatorio, es una variable aleatoria. “El concepto de variable aleatoria es uno de los conceptos base de la teoría de probabilidad y de la Inferencia Estadística, y desde una perspectiva matemática permite, junto con las funciones de distribución, el manejo de la probabilidad y los sucesos aleatorios dentro del contexto de los números reales; y desde una perspectiva de modelación, permite acotar el contexto y trabajar específicamente con los elementos que son manipulables y de interés dentro de un problema que involucre algún fenómeno aleatorio”, Ruiz (2006).

3.5.3 Proceso de Construcción de Representaciones Gráficas: Las escalas

El proceso de construcción de gráficas incluye la atención a los ejes, a la selección de sus escalas y a las unidades en las cuales las variables son medidas. En cuanto a los ejes y sus escalas esto implica la decisión sobre el número más adecuado de unidades para los intervalos en los cuales están divididos los ejes; así, para cada eje cualquier intervalo de longitud debe representar el mismo número de unidades, como también se debe definir si ambos ejes utilizan o no la misma escala.

Las unidades en las cuales están medidas las variables juegan un papel preponderante en el diseño de las escalas, es por ello que las unidades pueden ser transformadas de acuerdo con las necesidades de quien construye el gráfico, y esta transformación puede realizarse cuando se requiera de unidades más precisas o significativas que aquellas en las cuales se expresaron inicialmente los datos. Esta transformación también es permitida cuando el nuevo tipo de unidad es más eficiente y sirve para generar gráficos de mayor calidad y comprensión. Un ejemplo de ello son los gráficos de peso y estatura según edad que ocupan el logaritmo de una cantidad, facilitando la localización de la cantidad como tal en el espacio gráfico del plano cartesiano.

Una consideración importante es el cambio de escala en una gráfica que puede inducir a errores de interpretación, debido a que puede crear ilusiones visuales y el trazado del gráfico resultar muy diferente al presentado cuando se utilizaba la escala inicial. Algunos investigadores, afirman que cambiar la escala de una gráfica una vez que los puntos han sido ubicados en el espacio gráfico puede convertirse en una dificultad para que el estudiante pueda abstraer desde el gráfico entendido como representación simbólica. Por esto cuando se realiza un cambio de escala es indispensable determinar las características visuales que permanecen constantes y aquellas que se alteran, antes de proceder a interpretarla, (García, 2005).

García, tras su revisión de literatura, sostiene que un estudiante está capacitado para construir gráficos cuando, a partir de una tabla completa de datos o de la descripción completa de una investigación, es capaz de: identificar de manera correcta las variables expresadas en los datos; asignar de manera correcta cada una de las variables a los ejes del plano cartesiano; establecer correctamente las escalas para cada uno de los ejes, especificando las unidades en las cuales los datos son expresados; ubicar los pares de datos ordenados (las coordenadas) como puntos dentro del espacio gráfico del plano cartesiano; y seleccionar el gráfico con el modelo más apropiado.

Leinhardt, Zalavsky y Stein (1990, citados por García 2005) sostienen que la construcción de representaciones gráficas es un proceso que puede iniciarse desde diversas fuentes, como por ejemplo: un grupo de pares ordenados de datos, una ecuación que exprese una función, o una tabla de datos. Una vez determinada la fuente de construcción del gráfico, se procede a la selección y denominación de cada uno de los ejes del gráfico, la determinación de la escala a utilizar para ubicar las mediciones realizadas, la identificación de las unidades en las que se expresan los datos dentro de la gráfica y, la ubicación de los pares ordenados de datos dentro del espacio gráfico. Los autores destacan lo creativo de este proceso porque se generan elementos nuevos los que no han sido facilitados al inicio de la construcción.

Respecto a la dificultad que representa la tarea de la construcción de gráficos, ésta depende del punto de partida que se tome para iniciar el proceso. Así, si se parte de una tabla de datos, de un grupo de pares ordenados o de un gráfico, en los cuales los ejes y las unidades están previamente determinados, la tarea se hace de baja dificultad. Por el contrario si se parte de una ecuación para la construcción del gráfico la tarea presenta un mayor nivel de dificultad. Por último, si se quiere construir una ecuación a partir del gráfico previamente construido, la dificultad aumenta considerablemente (García, 2005). Sin embargo, como se señalaba anteriormente; la tarea de comprensión de una tabla cuantitativa no resulta tan fácil como pudiera parecer, un estudio de niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria indica que no hay una mejora gradual de la habilidad interpretativa en edad escolar y que las preguntas que exigen la comprensión de la estructura tabular de la información resultan más difíciles que aquellas otras que demandan una lectura directa de datos (Gabucio, 2010).

3.5.4 Proceso de Interpretación de las Representaciones Gráficas

Algunos investigadores han abordado el proceso constructivo de los gráficos, en tanto que otros se han interesado más en el proceso interpretativo. Al interpretar se requiere la reordenación del material y la clasificación de la importancia de los factores menos importantes (Wood, 1968, citado por Friel, Curcio y Bright, 2001). Otros estudios afirman que para los estudiantes es más fácil interpretar puntos marcados en una recta que representarlos por ellos mismos (Serrano, 2009).

Interpretar un gráfico significa descomprimir la información que se encuentra en él para encontrar interrelaciones y patrones aparentes entre las variables. Al interpretar un gráfico se construye sentido y se gana significado a partir de su totalidad o de una parte de él, y este proceso depende del referente representado por el gráfico (situaciones o relaciones funcionales de carácter abstracto). De esta manera, de acuerdo a cómo se presenta el gráfico, el significado construido a partir de él puede referirse al espacio simbólico del gráfico o a un espacio diferente, como el constituido por la situación dentro de un contexto.

3.5.5 Proceso de Interpretación de las Representaciones: Tendencia

En muchos casos interpretar una representación gráfica significa hacer interpretaciones entre dos referentes o espacios. Esto ocurre cuando la tarea de interpretación además de estar relacionada con un gráfico, lo está con una situación problema y/o una relación algebraica. En estos casos la interpretación gráfica involucra la conversión en otro tipo de tipo de representación (Janvier 1987b; Kaput 1987, citados por García 2005). Un ejemplo de este tipo de tareas de interpretación solicita al estudiante que, observando la gráfica, determine el punto donde se produce la intersección entre la recta y el eje Y, además del valor y el signo de la pendiente m (tratándose de una ecuación lineal del tipo $y = mx + b$). Este tipo de tarea contempla además de la interpretación de la gráfica como tal, pasar desde la gráfica a la formulación de la ecuación de la recta. Otro ejemplo de este tipo de tareas es la interpretación de una gráfica cuando ésta se refiere a una situación específica, este tipo de interpretación comprende el paso desde la representación gráfica a la situación misma.

Ainley, Nadi y Pratt (2000, citados por García 2005) afirman que la interpretación de una gráfica se corresponde con la construcción de significado para las tendencias encontradas en los datos dentro de un proceso experimental. Los mismos autores, desde un análisis epistemológico, proponen los siguientes elementos como formadores del concepto "tendencia": dependencia entre datos bivariados (correlación); interrelación visual continua entre la sucesión de puntos (linealidad); posibilidades de interpolación (datos no disponibles puedan relacionarse con datos disponibles); posibilidades de extrapolación (datos no disponibles puedan relacionarse con datos que estén más allá de los datos disponibles); conexión entre la dependencia presentada entre los grupos de datos y la interrelación entre las variables experimentales (interpretación).

La extrapolación y la interpolación, consideradas como extensiones de la interpretación, requieren no sólo indicar la esencia de la comunicación, sino también identificar algunas de las consecuencias. En el trabajo con gráficos, se podría extrapolar o interpolar señalando las tendencias percibidas en los datos o especificando los alcances (Friel, Curcio y Bright, 2001).

3.5.6 Proceso de Interpretación de las Representaciones: Predicción

Si la interpretación de un gráfico busca conjeturar sobre la posición de nuevos puntos en ella y sobre la forma de nuevos segmentos o partes del gráfico, entonces se tiene como objetivo la predicción. La ejecución de este tipo de tareas de interpretación depende de la habilidad de estimación para poder imaginar o anticiparse cómo será el resto del gráfico y cómo se podría observar éste en su totalidad.

La ejecución de las tareas de interpretación de este tipo también puede depender de las habilidades de medida y de detección de patrones o tendencias. El carácter de las interpretaciones del tipo predicción hace que éstas conduzcan a muchas conclusiones que, aunque probables, no pueden ser probadas.

3.5.7 Proceso de Interpretación de las Representaciones: Contexto

Leinhardt, Zalavsky y Stein (1990, citados por García 2005) afirman que el análisis de los procesos interpretativos de las representaciones gráficas pasa por el reconocimiento de la situación de la que forma parte la gráfica interpretada. Para estos autores la situación comprende dos aspectos del contexto: el circundante de la tarea y el del problema.

El contexto circundante de una representación gráfica está constituido por el área de conocimiento a la cual se refiere y en la que se está haciendo uso de ella. Así el contexto circundante de una gráfica puede ser las matemáticas puras, las ciencias sociales o las ciencias experimentales. De acuerdo con el contexto circundante puede variar el objetivo de la interpretación de la representación gráfica; es así como el objetivo de la interpretación de las representaciones gráficas en el contexto matemático es el de la construcción de conceptos matemáticos y formales. En el contexto circundante de las ciencias experimentales, la interpretación de las gráficas suele ser cualitativa y con fines de predicción, teniendo como fin detectar patrones subyacentes y proveer información sobre los fenómenos representados por la gráfica.

El contexto de una representación gráfica está constituido por la situación problema en la cual se encuentra inmersa, y esta situación puede ser contextualizada o abstracta; en el caso de que la situación problema sea contextualizada aunque la familiaridad de la misma pueda facilitar la interpretación, se pueden generar confusiones pues los estudiantes pueden creer que la representación gráfica es una representación iconográfica de la situación.

3.6 La Transnumeración: Cambio de representación en Estadística

La transnumeración consiste en obtener una nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro para generar comprensión. Wild y Pfannkuch (1999), son los estadísticos creadores del concepto de transnumeración, y lo describen como un proceso dinámico en que se ponen en juego la habilidad para ordenar datos adecuadamente, crear tablas o gráficos de los datos, y encontrar medidas para representar el conjunto de datos.

Desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración:

(1) a partir de la medida que “captura” las cualidades o características del mundo real,
(2) al pasar de los datos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos, y
(3) al comunicar este significado que surge de los datos, de una forma que sea comprensible a otros.

Más precisamente, los estudiantes necesitan progresar a través de cuatro procesos en orden a obtener una representación adecuada y efectiva de los datos. Estos procesos en los cuales los datos son transformados encarnan el proceso de transnumeración: decidir qué mensaje transmitir a partir de los datos, determinar qué tipo de representación es necesaria, elegir un método de cálculo para transformar los datos, y utilizar en la representación los datos transformados en el tercer paso, (Chick, 2003).

Los dos primeros procesos pueden ocurrir en orden inverso o incluso simultáneamente. Los últimos tres parecen estar particularmente relacionados entre sí. Si los estudiantes no tienen una visión clara del mensaje que están transmitiendo esos datos, tendrán dificultad para decidir qué tipo de representación usar. Una real comprensión surge y se hace evidente a los demás cuando la transnumeración toma lugar, es decir, cuando un alumno es capaz de representar el conocimiento en una serie de diferentes formas y de traducirlo entre estas diferentes representaciones, —proceso identificado por Duval, como conversión de registros semióticos—.

Chick y Watson (2001) indican que a los estudiantes les resulta más fácil interpretar los datos que representarlos en una forma apropiada y que los alumnos son capaces de interpretar datos a un mayor nivel que sus habilidades de representación. Estos autores señalan que la elección de la representación de los datos resulta difícil, y que el proceso transnumerativo de representación de datos puede ser más complejo que el de interpretación de los datos. En sus estudios encuentran que una de las razones de los problemas que surgen en la representación de datos, se deriva de una falta de comprensión de cómo representar apropiadamente diferentes tipos de datos.

Al finalizar este capítulo parece necesario destacar que la representación de la información es un proceso fundamental del pensamiento estadístico. Este proceso incluye construir una representación de datos para un determinado conjunto de datos y construir alternativas para visualizarlo. La construcción de representaciones de datos generalmente no debe ser un fin en sí mismo (Bright y Friel, 1998), por el contrario, la capacidad de representar los datos es importante debido al hecho de que una vez que las representaciones visuales se han construido, se pueden utilizar para ganar conocimiento sobre la naturaleza del conjunto de datos, y/o para comunicar los resultados del análisis de datos a otras personas.

CAPITULO 4

ANTECEDENTES SOBRE EL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO

4.1 Introducción

Este capítulo trata sobre el nuevo rol del docente en la relación didáctica, y de su dominio de los contenidos requerido en la tarea de enseñanza.

Existiendo dos vertientes de investigación, una de línea anglosajona y otra francófona, se realiza una breve revisión de los conceptos didáctica, pedagogía y educación, no para aclarar, sino para plantear la tensión existente entre ellas.

Se detalla la propuesta de Shulman en los años ochenta y su evolución en las distintas investigaciones, profundizando en las variables involucradas del Conocimiento Pedagógico del Contenido, CPC. Tras una revisión de literatura se bosqueja el estado del arte en investigación sobre el conocimiento para la enseñanza y sobre el conocimiento para la enseñanza en matemática, incluyendo algunos de los hallazgos sobre el CPC de los profesores de matemática.

Finaliza el capítulo con el intento de establecer puentes entre el constructo del CPC de Shulman y la Didáctica francesa.

4.2 La Didáctica de la Matemática

Las evoluciones experimentadas por la Didáctica de la Matemática, entre ellas, la evolución de la investigación sobre el rol del docente en la relación didáctica, ha modificado la mirada sobre los docentes, la formación de docentes, y sobre las relaciones entre teoría y práctica. El rol del docente y la visión sobre él, ha avanzado desde un perfil básico hacia la apreciación de un profesional que trabaja en espacios humanos complejos y dinámicos, convirtiéndose en un actor problemático de la relación didáctica, (Artigue, 2004).

Los marcos teóricos como la Teoría de Situaciones de Brousseau, la Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard, y el desarrollo de la Teoría Antropológica desde principios de los noventa por Y. Chevallard, han desempeñado un papel decisivo en la articulación de lo micro y lo macrodidáctico, reforzando el enfoque sistémico de la didáctica francesa.

En las investigaciones francesas, los principales marcos teóricos existentes han ofrecido sus contribuciones al rol del docente. En la Teoría de Situaciones Didácticas, se han explotado especialmente los trabajos sobre la estructuración del *milieu*, haciendo posible identificar diferentes posiciones y papeles para el docente. En la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que combina la praxis y el logos, se ha realizado un trabajo sistemático para identificar las acciones profesionales del docente y encontrar los medios de describir, caracterizar y evaluar las praxeologías didácticas, definidas de manera paralela a las praxeologías matemáticas (Chevallard, 1999). Y el doble enfoque de Roberts (2001, citado por Artigue 2004), didáctico y ergonómico, procuran contribuir al análisis y comprensión de las prácticas docentes, (Artigue, 2004).

En los últimos 25 años hay evidente y creciente atención internacional al tema del dominio de los contenidos requerido en la tarea de enseñar. En 1986, Shulman planteó la necesidad de indagar en el desarrollo del conocimiento del docente en la enseñanza, con el fin de develar las formas de comprensión cognitiva del contenido de la enseñanza por parte de los profesores, distinguiendo entre el conocimiento del profesor para enseñar un dominio específico y su conocimiento del dominio específico.

Shulman (1987, p. 11) manifiesta que “una de las frustraciones de la docencia como quehacer y profesión es la profunda amnesia individual y colectiva, la frecuencia con que las mejores creaciones de quienes se dedican a esta actividad se pierden, de modo que no están disponibles para sus colegas actuales y futuros”. Además, hace notar la carencia de un historial de práctica, (p.12) “Sin ese sistema de notación y memoria, es difícil pasar a las siguientes etapas de análisis, interpretación y codificación de principios de práctica… hemos concluido que los conocimientos potencialmente codificables, que pueden recogerse gracias a la sabiduría adquirida con la práctica, son muy amplios. Los profesores simplemente poseen un extenso bagaje de conocimientos que nunca han intentado siquiera sistematizar”.

4.3 ¿Didáctica, Pedagogía o Educación?: Términos en la Revisión de Literatura

Didaktik der Mathematik (alemán), *Didactique des mathématiques* (francés), *Didáctica de las matemáticas* (español), *Matematikdidaktik* (lenguas escandinavas), *Wiskundedidactiek* (holandés) son términos que se utilizan en Europa para denominar la Didáctica que nos interesa. Kilpatrick (2008) señala que “en Francia y Alemania, el término *educación* es poco usado por los educadores matemáticos. Ellos prefieren hablar de didáctica o materia didáctica. En francés, el término didáctica no significa *el arte o ciencia de enseñar*, “su propósito es mucho más amplio: incluye la enseñanza, el aprendizaje y la escuela como un sistema, y así sucesivamente" (Douady y Mercier, 1992, p. 5, citado por Kilpatrick, 2003).

En muchos países, incluidos los nórdicos, hay una larga historia de uso de *pedagogía* para designar la educación en la universidad, y los educadores matemáticos han tenido que luchar para conseguir el reconocimiento de la didáctica como un campo de estudio por derecho propio.

En inglés, tanto la didáctica como la pedagogía han adquirido matices negativos, incluso connotaciones peyorativas, y tampoco se utiliza mucho en el discurso educativo (Andrews, 2007, Kilpatrick, 2003 citados por Kilpatrick, 2008). La enseñanza didáctica se entiende como algo rígido y moralista, y el pedagogo como aquel que enseña de una manera pedante o dogmática. En consecuencia, los países de habla inglesa tienden a utilizar *educación*.

En algunos países, la adopción del término *didáctica de la matemática* ha sido muy beneficiosa para educadores matemáticos que buscan el reconocimiento para el campo como una ciencia de la matemática. Las distinciones entre *educación*, *didáctica* y *pedagogía* están lejos de ser claras; Bertrand y Houssaye (1999, citado por Kilpatrick, 2008) sostienen que en el mundo de habla francesa, los investigadores y teóricos de la didáctica y la pedagogía "operan en el mismo territorio y usan las mismas herramientas epistemológicas" (p. 34). Sin embargo,

> “la mayoría francófona de didactas está ansiosa de diferenciarse de los pedagogos, los teóricos y profesionales de la pedagogía. Esta diferenciación se hace generalmente de la siguiente manera: pedagogía es más general que la didáctica, menos científica, y por tanto con un menor status de mejora. Es más atractivo definirse uno mismo como un didacta que como pedagogo, dicen los didactas”. (p. 41).

Kilpatrick (2008) sostiene que “la terminología que utilizamos puede ser elegida tanto por concepciones políticas como académicas. Y también parece, según uno analiza los modelos de uso, que la *educación matemática* tiende a ser más amplia, que el término más difuso de *didáctica de las matemáticas*”. (p. 12).

Otras visiones integrativas afirman, “Consideramos la ‘didáctica de las matemáticas’ como una disciplina científica que guía nuestra investigación en educación matemática y a la que nuestra investigación en educación matemática contribuye”. (van den Heuvel-Panhuizen, 2007).

Concluimos en palabras de Brousseau (1991): “En la elección que hacemos de desarrollar bajo el nombre de Didáctica una teoría fundamental de la comunicación de los conocimientos matemáticos, no hay ninguna incompatibilidad con otras definiciones y otras orientaciones. Por el contrario, es una concepción que favorece la integración de los aportes de los otros dominios y su aplicación a la enseñanza, y que establece con la práctica una relación sana de ciencia a técnica, y no de prescripción a reproducción”.

Brousseau (2004) adopta una amplia definición: “La Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los conocimientos útiles a los hombre que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan". A la vez afirma que la didáctica no sustituye los enfoques investigativos sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas que utilizan conocimientos y métodos de diversas disciplinas, como la psicología, lingüística, sociología, pedagogía, epistemología, historia de las matemáticas, entre otras. La función científica y social de la didáctica sería más bien la de asignar a estos conocimientos exógenos un estatus y un modo de intervención en las decisiones didácticas.

4.4 Evolución del Conocimiento Pedagógico del Contenido

Algunos autores en español, denominan el CPC como "conocimiento didáctico del contenido", por ejemplo Marcelo (1998, citado por Bolívar, 2005) y Bolívar (2005); este último afirma "el peyorativo de "didactics" en el contexto anglosajón en el nuestro no existe [España], y la equivalencia de "pedagogical" por "didáctico" estaría justificada". A nuestro parecer el cambio de pedagógico por didáctico iguala ambos conceptos, estableciendo peligrosa e inapropiadamente que lo didáctico[7] es sinónimo de lo pedagógico[8].

Por otra parte y de acuerdo a Gascón (1998), la Didáctica de las Matemáticas puede seguir siendo considerada como la ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos, con la condición de que "didáctico" se entienda como "relativo al estudio de las matemáticas", y, siguiendo al mismo autor, la "Didáctica de las Matemáticas aborda de manera integrada, "lo matemático" y "lo pedagógico", (Gascón, 2002). La didáctica coexiste con un contenido en particular, y por ello es redundante mencionar "didáctico del contenido", pero tal vez para un público diverso sería confuso hablar del CPC como "conocimiento didáctico" a secas. Aclarado lo anterior, en nuestro estudio y en adelante, las siglas CPC corresponden al "conocimiento pedagógico del contenido".

En 1986 Shulman define en términos genéricos el conocimiento pedagógico del contenido, tanto como el conocimiento sobre cómo representar y formular mejor la materia para hacerla comprensible a otros, como el conocimiento sobre los estudiantes como aprendices, sus concepciones y subcomprensiones. Y define el conocimiento del contenido describiendo la comprensión del profesor de las estructuras de su dominio.

---

[7] didáctico, ca. (Del gr. διδακτικός). 1. adj. Perteneciente o relativo a la enseñanza. 2. adj. Propio, adecuado para enseñar o instruir. Método, género didáctico Obra didáctica 3. adj. Perteneciente o relativo a la didáctica. 4. f. Arte de enseñar. (Real Academia Española, www.rae.es).

[8] pedagógico, ca. (Del gr. παιδαγωγικός). 1. adj. Perteneciente o relativo a la pedagogía. 2. adj. Se dice de lo expuesto con claridad que sirve para educar o enseñar.

El concepto introducido por Shulman, “conocimiento pedagógico del contenido”, PCK en sus siglas en inglés, ha vivido un amplio desarrollo conceptual y de investigación empírica en los últimos años.

Diversas investigaciones internacionales han precisado su contenido específico en el campo de la matemática, y una de sus importantes contribuciones ha sido dilucidar cuán demandante matemáticamente resulta ser el trabajo de enseñar matemática, incluso en los primeros niveles, develando la complejidad subyacente en la dinámica de los espacios humanos escolares.

Shulman inicialmente propuso un mínimo de conocimientos que debe tener el profesor y los agrupó en tres categorías (Shulman, 1986): conocimiento del contenido de la materia específica (CC), conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y conocimiento curricular. Posteriormente, Shulman (1987) reconoce siete categorías: conocimiento del contenido (CC), conocimientos pedagógicos generales (CP), conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido (CPC), conocimiento de los aprendices y de sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines educativos.

Para Shulman (1987) el CPC articula la comprensión del contenido y el escenario pedagógico en el que los contenidos se organizan, se representan, y se adaptan a los intereses y a las capacidades diversas de los alumnos. El CPC incluye comprender las características del alumno y del contexto educacional; disponer con claridad metas educativas, propósitos y valores, bases filosóficas e históricas, como también se refiere a la habilidad para transformar el contenido en formas pedagógicamente potentes, que se adapten a los alumnos diversos en experiencia y capacidad.

En la década de los 90 estas categorías son redefinidas en cuatro áreas generales, y esta clasificación ha orientado mayoritariamente el desarrollo de la investigación en el área: conocimiento pedagógico general (CP), CC, CPC y conocimiento del contexto.

Park y Oliver (2008) afirman que los investigadores no están de acuerdo en su caracterización de la relación entre varios sub-dominios del conocimiento del profesor, aunque consistentemente aparecen cuatro puntos en común: CP, CC, CPC, y el conocimiento del contexto. Grossman (1990) indica que los conocimientos base para la enseñanza son el conocimiento de la materia, el conocimiento pedagógico, el conocimiento pedagógico del contenido, y el conocimiento del contexto. Estas cuatro áreas de conocimiento del profesor se muestran en la Figura 16.

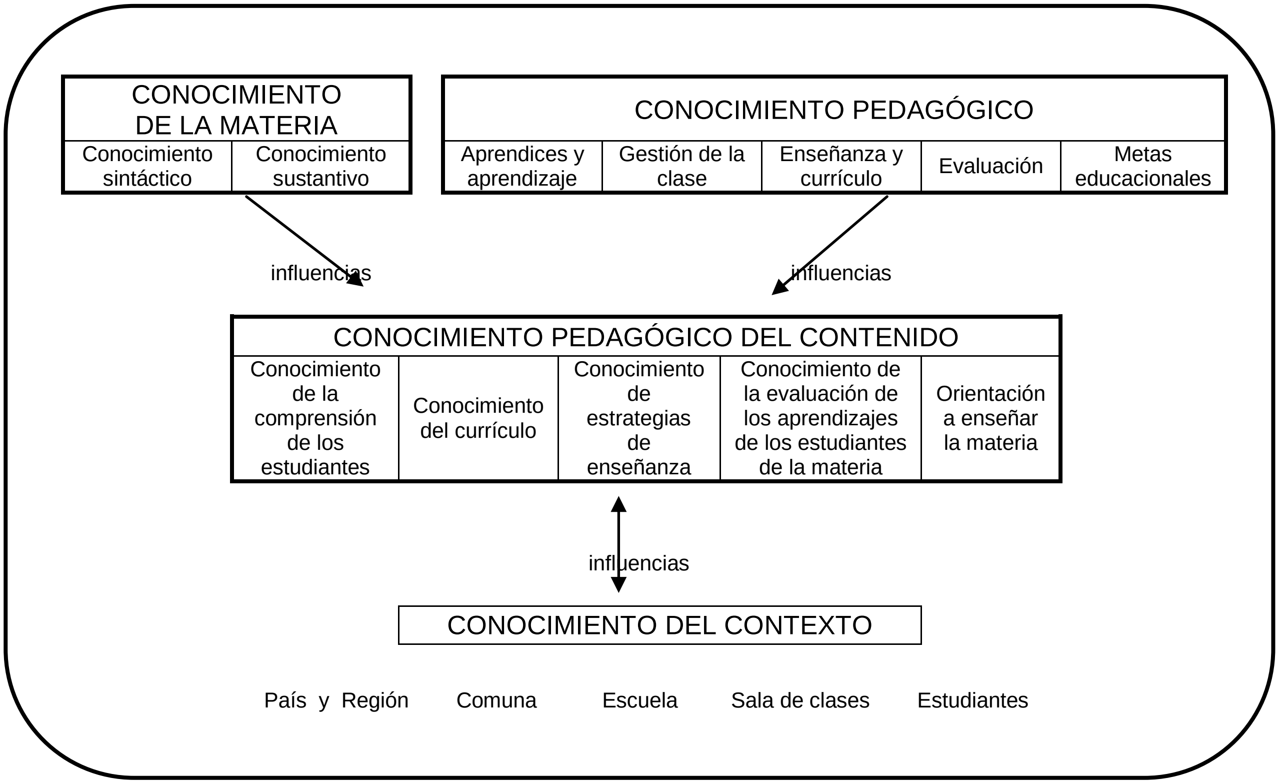


Figura 16: Conocimiento base para la enseñanza (modificada por Park y Oliver 2008, desde Grossman 1990) ofrece un panorama ilustrativo de los cuatro puntos en común.

Una de las formas comunes de los investigadores para identificar el CPC ha sido modificar la definición de Shulman (1986, 1987). Park y Oliver (2008) citan a dos autores de estos cambios: Geddis et al. (1993) quienes definen el CPC como el conocimiento que juega un rol en transformar la materia en formas que sean más accesibles a los estudiantes, y Carter (1990), quien considera el CPC como lo que saben los profesores acerca de su materia y cómo transforman ese conocimiento en el currículo dentro de la sala de clases.

En su conjunto y teniendo en cuenta estas variaciones, es la transformación del conocimiento de la materia con el propósito de enseñanza la que está en el corazón de la definición del CPC. Park y Oliver (2008) declaran que comúnmente el CPC se utiliza para adaptar el conocimiento de la materia con fines pedagógicos a través de un proceso que Shulman (1987) llama "transformación", Ball (1990) designa como "representación", Veal y MaKinster (1999) denominan "traducción", Bullough (2001) nombra "profesionalización", y Dewey (1902), titula “psicologización".

Garritz (2004) citando a Chevallard señala que éste maneja un concepto similar al del CPC, el de transposición didáctica: ‘‘Un contenido de saber que ha sido designado como saber enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica''.

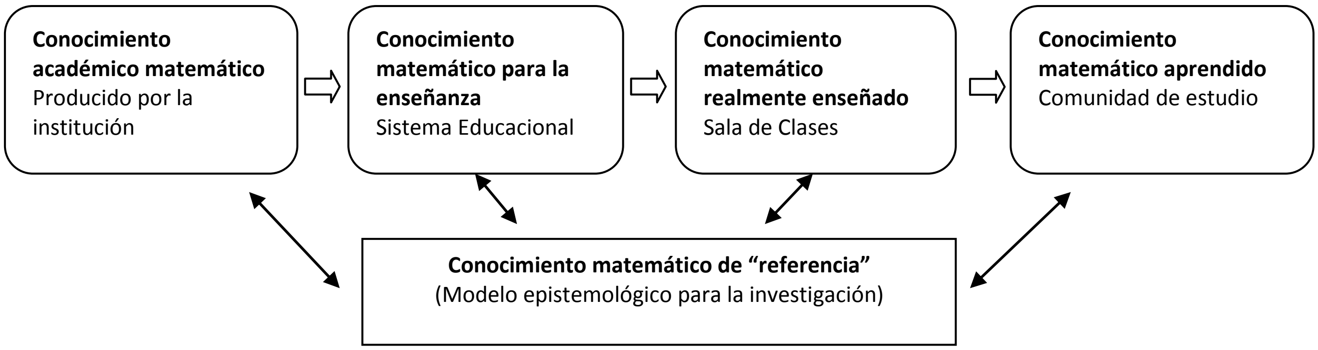


Figura 17: El proceso de transposición didáctica

Realizando una síntesis forzada, podemos señalar que Shulman afirma que la docencia se inicia cuando el profesor reflexiona en qué debe aprenderse y cómo será aprehendido por sus estudiantes. Y es en estos procesos reflexivos donde las creencias, teorías implícitas y otras formas de pensamiento interactúan con las variables del contexto, para configurar las acciones que se concretan en el aula. Desde que Shulman resaltó los procesos de enseñanza, la investigación en educación ha distinguido tres dimensiones básicas del conocimiento del profesor: el CC, el CPC, y el CP.

En el Informe OECD para Chile (2004, p.142) se destacaba lo expresado por un estudiante de pedagogía "…he aprendido a enseñar y he aprendido mucho sobre el Castellano, pero no he aprendido cómo enseñar Castellano…". Interpretando la afirmación del estudiante en términos del marco teórico asumido en esta tesis, el estudiante tiene conciencia que ha aprendido el Conocimiento Pedagógico General, CP, y ha profundizado en el Conocimiento del Contenido, CC, pero no ha aprendido el Conocimiento Pedagógico del Contenido, CPC.

4.5 El enfoque de Shulman sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido

Una contribución central de Shulman y sus colegas fue replantear el estudio del conocimiento del profesor de manera de atender al rol del contenido en la enseñanza. Este fue un cambio radical de la investigación anglosajona de entonces, que se centraba casi exclusivamente en los aspectos generales de la enseñanza. El contenido era poco más que el contexto, y la atención al contenido en sí mismo y al rol que desempeñaba en la enseñanza o en el pensamiento del profesor era menos preponderante. De hecho, tan poca atención se dedicó a examinar el contenido y su rol en la enseñanza que Shulman lo citó como "el paradigma perdido" en la investigación sobre la enseñanza y el conocimiento del profesor (1986). Una segunda contribución de Shulman y sus colegas fue representar la comprensión del contenido como un tipo especial de conocimiento técnico fundamental para la profesión de la enseñanza.

Shulman en el prefacio de un libro de CPC (Lederman y Gess-Newsome, 1999), deja entrever que su enfoque está alejado del "behaviorismo" (entendido como la interpretación de las conductas como comportamientos que pueden ser explicados en términos de estímulo-respuesta), "Yo había criticado el programa de la investigación proceso-producto, por muchas razones en el pasado, principalmente su atención a la conducta del profesor en lugar de pensamiento del profesor como el foco de "proceso" y su dependencia de las pruebas estandarizadas como únicos indicadores sobre el producto".

Para caracterizar el conocimiento profesional de enseñanza, Shulman y sus colegas desarrollaron tipologías. Según se vio, los límites específicos y los nombres de las categorías variaron a través de publicaciones, "…aunque debo admitir que con un escaso grado de coherencia entre los diversos artículos", Shulman (1987). Una de las articulaciones más completas se reproduce en el recuadro de la figura 18, y corresponde a las categorías principales de Shulman del Conocimiento del Profesor.

Estas categorías intentaron destacar la importancia del rol del CC y situar el conocimiento basado en el contenido en el panorama más amplio de conocimientos profesionales para la enseñanza. Las tres últimas categorías definen las dimensiones del contenido específico y en conjunto constituyen lo que se refiere Shulman en la investigación sobre la enseñanza como "un punto ciego en lo que respecta al contenido que caracteriza la mayoría de la investigación sobre la enseñanza, y como consecuencia, a la mayoría de nuestros programas a nivel estatal de evaluación del profesor y certificación del profesor" (1986, pp. 7-8).

El primero, el **conocimiento del contenido**, incluye el conocimiento de la materia y su estructura de organización (Grossman, Wilson y Shulman, 1989; Wilson, Shulman, y Richert, 1987). Shulman (1986) argumentó que el conocimiento de una materia para la enseñanza requiere algo más que saber sus hechos y conceptos. Los profesores también deben comprender los principios de organización y las estructuras y las reglas para establecer lo que es legítimo hacer y decir en un área. El profesor no sólo necesita entender que algo es así, el profesor debe comprender en profundidad de por qué es así. Por otra parte, se espera que el profesor comprenda por qué un tema en particular es especialmente fundamental para una disciplina, mientras que otro puede ser algo periférico.

La segunda categoría, el **conocimiento curricular**, está "representado por la gama de programas diseñados para la enseñanza de materias particulares y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales instruccionales disponibles en relación a esos programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del currículo particular o materiales del programa en circunstancias particulares" (p. 10). Además, Shulman señaló otras dos dimensiones de los conocimientos curriculares que son importantes para la enseñanza, el conocimiento curricular lateral y conocimiento curricular vertical. El lateral se relaciona con el conocimiento del currículo que está siendo enseñado y que los estudiantes están aprendiendo en otros cursos (en otras áreas de materias). El vertical incluye "la familiaridad con los temas y cuestiones que han sido y serán enseñadas en la misma asignatura durante el año anterior y posteriormente en la escuela, y los materiales que los personifican" (Shulman, 1986, p. 10).

■ El **conocimiento pedagógico general**, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura
■ El **conocimiento de los alumnos y sus características**
■ El **conocimiento de los contextos educativos**, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y el financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas
■ El **conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos**, y de sus fundamentos filosóficos e históricos
■ El **conocimiento del contenido**
■ El **conocimiento del currículo**, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente
■ El **conocimiento pedagógico del contenido**, esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los profesores, su propia forma especial de comprensión profesional. (Shulman, 1987, p. 8)

Figura 18: Categorías principales según Shulman (1987).

El último, y probablemente el más influyente de las tres categorías relacionadas con el contenido fue el nuevo concepto **de conocimiento pedagógico del contenido**. Shulman (1986, p. 9) definió el conocimiento pedagógico del contenido, abarcando:

> "…las formas más útiles de representación de esas ideas, las más poderosas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones, —en una palabra, las formas más útiles de representar y formular la materia que hacen que sea comprensible a los demás… […] el conocimiento pedagógico del contenido también incluye la comprensión de lo que hace el aprendizaje de un tema específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes traen con ellos al aprendizaje de los temas y clases más frecuentemente enseñados en clases".

Como concepto, el CPC, con su foco sobre las representaciones y concepciones e ideas erróneas, amplía las ideas acerca de cómo el conocimiento es importante a la enseñanza, lo que sugiere que no es sólo CC, por una parte, y el CP, por otra, sino también una especie de amalgama de conocimientos del contenido y pedagogía que es central en el conocimiento necesario para la enseñanza. En palabras de Shulman (1987, p.8),

> "el conocimiento pedagógico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del contenido del especialista de la del pedagogo".

4.6 El estado del arte sobre el conocimiento para la enseñanza

A lo largo del trabajo de Shulman y sus colegas, las categorías para el conocimiento del profesor se sometieron a un número de revisiones. Los investigadores notaban que la comprensión del conocimiento del profesor estaba incompleta, y asociaron el valor de las distinciones como heurísticas, como una herramienta para ayudar a identificar distinciones en el conocimiento del profesor que podrían concernir para una enseñanza efectiva. Sin embargo, Shulman y sus colegas no buscaron construir una lista de lo que los profesores necesitan saber en algún campo particular de conocimiento. Su trabajo trató de proporcionar una orientación conceptual y un conjunto de distinciones analíticas que centrara la atención de la investigación y de los responsables de políticas, sobre la naturaleza y tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de una materia.

Al llamar la atención sobre lo que él nombró "paradigma perdido", o la ausencia de investigación centrada en el CC del profesor, Shulman y sus colegas definieron una perspectiva que destacó la naturaleza del contenido de la enseñanza. Sin embargo, también trataron de precisar las formas en que el conocimiento del contenido de la enseñanza es distinto del conocimiento de los contenidos disciplinarios, proponiendo implícitamente que el rol del conocimiento del contenido define la enseñanza como una profesión, es decir, "la enseñanza es un trabajo profesional con su propio conocimiento base profesional" (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

Hubo un interés inmediato y generalizado de las ideas presentadas por Shulman y sus colegas. Desde que estas ideas se presentaron por primera vez, el discurso de Shulman (1986) y su correspondiente artículo en Harvard Education Review (1987) han sido citados en más de 1200 artículos en revistas. Este interés se ha mantenido con no menos de 50 citas a estos dos artículos cada año desde 1990. Quizá lo más notable es el alcance de este trabajo, que aparece en más de 125 revistas diferentes, en profesiones muy diversas, derecho, enfermería, negocios, entre otras; y para públicos desde pre-escolares hasta estudiantes de doctorado. Miles de artículos, capítulos de libros, e informes del uso para estudiar la noción de conocimiento pedagógico del contenido, en una amplia variedad de áreas temáticas: ciencias, matemáticas, estudios sociales, inglés, educación física, comunicación, religión, química, ingeniería, música, educación especial, aprendizaje del idioma inglés, educación superior, y otros; y tales estudios no muestran signos de retroceso, (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

La noción de CPC ha permeado los trabajos de académicos sobre la enseñanza y formación del profesorado, pero lo ha hecho de manera desigual entre las áreas. Ball, Thames, y Phelps (2008) encuentra curioso que en su estudio de la literatura, aproximadamente una cuarta parte de los artículos sobre el conocimiento pedagógico del contenido está en la educación científica, y solo algunos en educación matemática. La autora destaca que la amplitud de la literatura sobre el CPC se relaciona con el valor heurístico alcanzado, como una forma de conceptualizar el conocimiento del profesor.

Ball, Thames, y Phelps (2008) afirman que,

“Sin embargo, el área ha hecho pocos progresos desde el encargo inicial de Shulman: desarrollar un marco teórico coherente para el conocimiento del contenido para la enseñanza. Las ideas siguen siendo teóricamente dispersas, sin una definición clara. Dado que los investigadores tienden a especializarse en un solo tema, gran parte del trabajo se ha desarrollado en capítulos más o menos en forma paralela pero independiente. A menudo no está claro cómo las ideas en un área temática están relacionadas a otra o incluso si los descubrimientos dentro del mismo tema tienen puntos de vista similares o diferentes del conocimiento de la asignatura del profesor. Irónicamente, casi un tercio de los artículos que citan el CPC lo hacen sin atención directa a un área de contenido específico, en lugar de hacer afirmaciones generales sobre el conocimiento de los profesores, formación de docentes, o políticas. Los académicos han utilizado el concepto de CPC, como si sus fundamentos teóricos, distinciones conceptuales, y pruebas empíricas ya estuvieran bien definidos y comprendidos universalmente. Llama la atención la falta de definición de términos claves. El CPC no está a menudo claramente distinguido de otras formas de conocimiento del profesor, algunas veces se refieren a algo que es simplemente conocimiento del contenido y, a veces a algo que es en gran medida la habilidad pedagógica. La mayoría de las definiciones son superficiales y, a menudo, concebida en términos generales. Este parece ser el caso a través de todas las materias. Por ejemplo, el CPC ha sido definido como "la intersección del conocimiento de la materia con el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje" (Niess, 2005, p. 510) o como "el dominio del conocimiento del profesor que combina el conocimiento de la materia y el conocimiento de la pedagogía" (Lowery, 2002, p. 69). En términos aún más generales, el CPC es definido simplemente como "el producto de la transformación de la materia en una forma que facilite el aprendizaje de los alumnos" (de Berg y Greive, 1999, p. 20). A pesar de estas y muchas otras definiciones breves captan la idea general de CPC como un ámbito que combina el tema con la docencia, es lo suficientemente amplia como para incluir casi cualquier paquete de conocimientos del profesor y creencias.

Una definición breve, sin embargo, no es el único factor que contribuye a la falta de claridad sobre lo que podría considerarse como el conocimiento pedagógico del contenido. Más definiciones cuidadosas y detalladas siguen dejando poco claro el límite entre el CPC y otras formas de conocimiento del profesor. Por ejemplo, Magnusson, Krajcik, y Borko (1999) definieron el constructo de la siguiente manera, *"Conocimiento pedagógico contenido es la comprensión de un profesor de cómo ayudar a los estudiantes en la comprensión de asignaturas específicas. Ello incluye el conocimiento de cómo tópicos de la asignatura particulares, problemas y cuestiones pueden organizarse, representarse y adaptarse a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y luego ser presentadas para la instrucción. . . . El rasgo definitorio del conocimiento pedagógico del contenido es su conceptualización como el resultado de una transformación de conocimiento desde otros dominios". (p. 96).* Cuando se define de esta manera, el conocimiento pedagógico del contenido se empieza a ver como si se incluye a casi todo lo que un profesor puede saber en la enseñanza de un determinado tema, oscureciendo distinciones entre las acciones del profesor, razonamiento, creencias y conocimientos".

4.7 El estado del arte sobre el conocimiento para la enseñanza en matemática

La importancia del conocimiento profesional del profesor en el contexto de la enseñanza de las matemáticas ha sido particularmente estudiado por Ball, Lubienski, y Mewborn (2001) y Fennema y Franke (1992). Estos últimos autores identificaron dos factores para el CC: conocimiento de las matemáticas (su naturaleza y la organización mental del conocimiento del profesor, sus interrelaciones, mapa conceptual) y, conocimiento de las representaciones matemáticas (entendimiento del contenido). Con respecto al CPC: conocimiento de los estudiantes (de su cognición, del ambiente a construir en el aula) y conocimiento de la enseñanza y la toma de decisiones.

El conocimiento de la cognición de los estudiantes se considera como una de las componentes importantes del conocimiento del profesor, ya que, según Fennema y Franke (1992), el aprendizaje se basa en lo que ocurre en el aula, y por lo tanto, no sólo lo que los estudiantes hacen, sino que el ambiente de aprendizaje es importante para aprender. La última componente del conocimiento del profesor es el conocimiento de la enseñanza y la toma de decisiones, ello configura las creencias del profesor, sus conocimientos, juicios y pensamientos, que en el ejercicio tienen un efecto sobre las decisiones que toman e influyen en sus planificaciones y acciones en el aula (Fennema y Franke, 1992).

El equipo de la Universidad de Michigan liderado por Deborah Ball, distingue tres componentes dentro del conocimiento matemático para enseñar: el conocimiento matemático común (el que todos los adultos educados debieran tener, como operar correctamente, conocer definiciones, teoremas, propiedades); el conocimiento matemático especializado (el conocimiento especialista adquirido a través de la práctica profesional y la experticia en el aula, como manejar variedad de representaciones y ejemplos, explicaciones precisas y adecuadas, aplicaciones, modelos, visualizaciones); el conocimiento de alumnos y matemáticas (conocer el razonamiento de los aprendices, sus errores típicos, sus dificultades, sus estrategias más frecuentes en relación a los tópicos de la matemática escolar). Los estudios de este equipo han logrado caracterizar con detalle el conocimiento matemático requerido para enseñar matemática principalmente en la escuela básica; y han podido establecer que el CPC de los profesores es un significativo predictor de los logros de aprendizaje matemático de los alumnos.

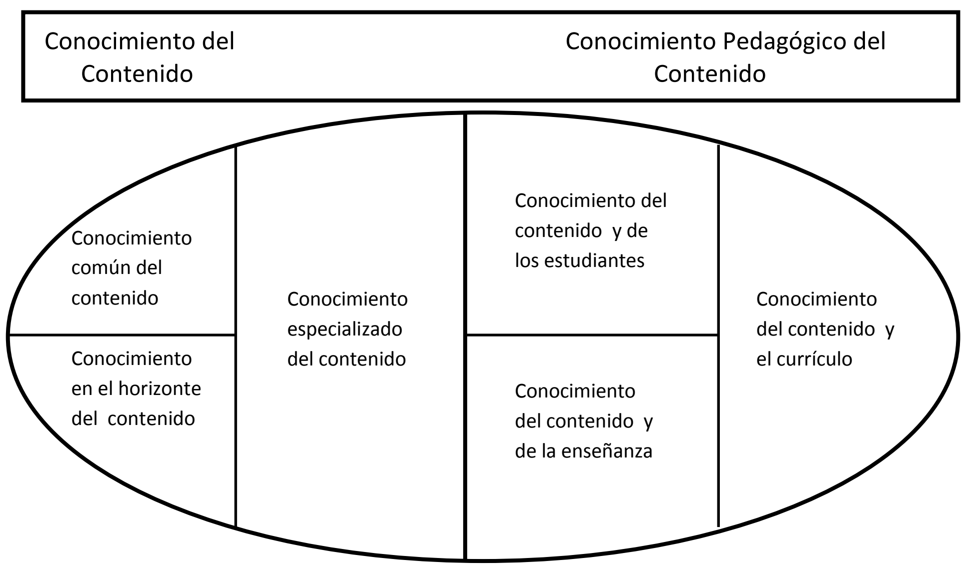


Figura 19: Conocimiento matemático para la enseñanza (Ball y Sleep, 2007).

An, Kulm y Wu, (2004) identifican 3 dimensiones en el CPC: el conocimiento del contenido, del currículo y de la enseñanza. Y aseveran que el conocimiento de la enseñanza es el principal y lo aceptan como la componente básica del conocimiento pedagógico del contenido. Asimismo dentro del proceso de enseñanza enfocado en el conocimiento del pensamiento de los estudiantes incorporan cuatro aspectos: la construcción de ideas matemáticas en el estudiante, el direccionamiento de las subcomprensiones de los estudiantes, el involucrar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, y el fomento del pensamiento matemático de los estudiantes.

Hill et al. (2008) establecen 3 categorías del CPC: el conocimiento de la relación de los alumnos con el contenido (CRAC), el conocimiento de la enseñanza del contenido, y el conocimiento del currículo. El CRAC hace referencia a la familiaridad del profesor con el pensamiento matemático de los alumnos, como también a los errores comunes de ellos. Con respecto a cómo aprenden los alumnos, distinguen 4 sub-categorías: errores comunes de los alumnos y explicaciones a los errores; comprensión del conocimiento de los alumnos y cuándo una producción del alumno muestra más entendimiento; secuencia de desarrollo del alumno (tipos de problemas por edad, qué aprende primero, de qué es capaz); y estrategias de cálculo comunes en los alumnos.

Los profesores efectivos tienen conocimiento de las ideas y el pensamiento matemático de los alumnos. Pero no hay suficiente conceptualización sobre este dominio, ni medición del mismo. Este conocimiento ha mostrado ser robusto, pese a que requiere desarrollo. En el marco del CRAC, el profesor reconoce los errores habituales de los alumnos en áreas particulares, reconoce que los alumnos encuentran tópicos más difíciles, y que ciertas representaciones son apropiadas para ellos.

En el 2008, Park y Oliver identificaron 5 componentes en el CPC: conocimiento de la comprensión de los alumnos, conocimiento del currículo, conocimiento de las estrategias de enseñanza, conocimiento de la evaluación del aprendizaje de los alumnos en torno a un tema, y orientación a la enseñanza de los contenidos matemáticos. Además, concluyeron en su estudio sobre la conceptualización del CPC, que éste se modifica con la reflexión del profesor sobre la enseñanza en la enseñanza, que la comprensión del profesor acerca de las ideas equivocadas de los alumnos constituye el principal factor del CPC que lleva a la forma de planear, conducir y evaluar la enseñanza, y que el CPC es idiosincrásico en algunas de sus manifestaciones; por lo que resulta complejo, dinámico y difícil de medir. (Ver Tabla 7, sobre las diferentes conceptualizaciones).

Hiebert et al. (2002) establecen que las rutinas que desarrollan los profesores con su práctica en la sala de clase les facilitan tener acceso y aplicar sus conocimientos de manera más rápida y eficiente; pero Krauss et al. (2008a) señalan que la práctica sin reflexión no es suficiente para ampliar el CPC. Otros estudios (Hashweh, 2005; Krauss et al., 2008a) ha llevado a otros modelos, como por ejemplo discusiones sobre la relevancia de la práctica como factor relevante del CPC.

Entre las conclusiones del estudio de Krauss et al. (2008a), se evidencia que el modelo de enseñanza fue consistente con la formación en la Universidad, pero no fue con los años de experiencia, lo que genera un conflicto con modelos explicativos del desarrollo profesional docente (Hashweh, op. cit.).

Desde la tabla 7, las categorías que muestran un mayor número de coincidencias desde diferentes conceptualizaciones son el conocimiento del contenido, el conocimiento de la comprensión del estudiante, y el conocimiento de las formas de representación del contenido a enseñar. Lo anterior coincide con las 3 dimensiones del CPC más importantes en la enseñanza de la matemática identificadas por Krauss et al. (2008a, 2008b), a saber: conocimiento de los profesores de las tareas matemáticas, conocimiento del profesor acerca de los conocimientos previos de los alumnos, (las dificultades y sus concepciones equivocadas) y conocimiento de los profesores sobre representaciones, analogías, ilustraciones, o ejemplos útiles acerca del contenido matemático a enseñar.

Baumert et al. (2010) perfilan el desarrollo de la teoría, señalando que varios autores han añadido y especificado estas componentes básicas del conocimiento profesional de los profesores (por ejemplo, Grossman, 1995; Sherin, 1996; Shulman, 1987). Ellos señalan que en la literatura de investigación sobre la enseñanza y formación del profesorado, existen pocos estudios empíricos hasta la fecha que han evaluado los diferentes componentes del conocimiento profesional directamente y los han usado para predecir la calidad de instrucción y los resultados de los estudiantes (Fennema et al., 1996; Hill, Ball, Blunk, Goffney y Rowan, 2007; Hill, Rowan y Ball, 2005).

El grupo de la Universidad de Michigan ha esforzado en desarrollar una teoría basada en la práctica del conocimiento del contenido para la enseñanza construida sobre la noción de CPC de Shulman, concepto que requiere un desarrollo teórico, clarificación analítica y comprobación empírica (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Tabla 7: Componentes del conocimiento pedagógico del contenido desde diferentes conceptualizaciones.

Categorías	Shulman (1987)	Tamir (1988)	Grossman (1990)	Marks (1990)	Smith y Neale (1989)	Cochran et al.(1993)	Geddis et al.(1993)	Fernández-Balboa (1995)	Maggnussonet et al.(1999)	Hasweh (2005)	Loughran et al. (2006)	Llinares (1994)	An, Kulm y Wu (2004)
Conocimiento de la materia enseñable	D	×	D	×	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Comprensión del estudiante	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	D
Estrategias de enseñanza y representaciones	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
Currículo	D	✓	✓	×	×	×	✓	×	✓	✓	×	×	✓
Medios	×	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
Evaluación	×	✓	×	×	×	×	×	×	✓	✓	×		
Materia	D	D	D	✓	D	✓	×	✓	×	✓	✓		
Contexto	D	×	D	×	×	✓	×	✓	×	✓	✓	×	×
Pedagogía	D	D	D	×	×	✓	×	×	×	✓	✓	✓	×

Nota Fuente: Cuadro modificado desde Park y Oliver (2008) y Sosa (2010).

✓ indica que el autor incluye la subcategoría como una componente del CPC, D que el autor lo coloca fuera de la categoría del CPC como distinguible, y × indica que el autor no discutió explícitamente esta subcategoría

El CPC y el CC son claramente diferentes, a pesar de estar fuertemente relacionados (Turnuklu y Yesildere, 2007; Buschang, 2008). Diversos estudios dan evidencias de que el conocimiento del contenido disciplinario del profesor es un factor significativo en el logro del estudiante. Por otra parte, Krauss et al. (2008b) indican que la literatura especializada reiteradamente sostiene que el conocimiento base de los profesores expertos no sólo es más extenso que el de profesores novatos, sino que está más conectado e integrado.

Sliva et al. (2007) hacen notar que un elemento clave característico de un profesor altamente calificado es su fuerte base en relación al conocimiento disciplinario. Ma (1999) sugiere que esta premisa es aplicable, particularmente, a las matemáticas. Y varios autores (Wilson et al., 2002; Wilson, Shulman y Richert, 1987) han postulado que los profesores de matemáticas exitosos necesitan una base sólida del conocimiento pedagógico del contenido.

Ma (1999) comparó a profesores de China y de Estados Unidos, y demostró que una "profunda comprensión de la matemática fundamental" se manifiesta en un amplio repertorio de estrategias pedagógicas sobre un rango de tópicos matemáticos. La amplitud, la profundidad y flexibilidad de la comprensión de las matemáticas de los profesores chinos les otorga un extenso y múltiple repertorio de estrategias para representar y explicar el contenido matemático respecto al de sus colegas en los Estados Unidos.

Los estudios de intervención demuestran que la mejora de la CC matemática puede conducir a una enseñanza de gran calidad (por ejemplo, Fennema y Franke 1992; Swafford, Jones, y Thornton, 1997).

Hill et al. (2008) indican que hay pocos datos a gran escala acerca del CPC y que es necesario precisar el significado del mismo. Estos autores han avanzado en la identificación de uno de los factores: el conocimiento del profesor acerca de la manera que los alumnos entienden el contenido.

McDiarmid, Ball y Anderson (1989, citado por Pinto, 2010) sostienen, en cuanto a las representaciones instruccionales, que los profesores deben desarrollar, seleccionar y usar representaciones apropiadas; tener un amplio y apropiado repertorio de representaciones de la materia que enseñan; desarrollar estándares mediante los cuales evalúen lo adecuado de las representaciones para un tema; comprender el contenido específico que subyace en las representaciones que utilizan, las formas de pensamiento disciplinario y el conocimiento asociado con este contenido y las características de los alumnos a los que enseñan; desarrollar un conocimiento flexible, pensado y conceptual de su materia que permita crear o seleccionar representaciones que capaciten a los alumnos en el desarrollo de un conocimiento similar.

En los últimos 20 años varios estudios cualitativos sobre la estructura y efectos del conocimiento del profesor. Una de las principales conclusiones de los estudios cualitativos sobre la enseñanza de las matemáticas es que el repertorio de las estrategias de enseñanza y el conjunto de representaciones matemáticas alternativas y explicaciones disponibles de los profesores en el aula son muy dependientes de la amplitud y profundidad de su comprensión conceptual de la materia (Baumert, 2010, p.138).

El informe final del National Mathematics Advisory Panel (p. 37, 2008), resume la situación como sigue, “Finalmente, con la excepción de un estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado en la enseñanza, no hay estudios [cuantitativos] identificados por este Grupo que hayan investigado la dinámica que examinaría cómo el conocimiento matemático de los profesores de primaria y de media afecta la calidad de la enseñanza, las oportunidades de los estudiantes para aprender, y las ganancias en el rendimiento a través del tiempo".

Este grupo fue el primero en medir el conocimiento matemático de los profesores de básica para la enseñanza directamente y en examinar su relación con el progreso del estudiante. Los estudios de este equipo han logrado caracterizar con gran detalle el conocimiento matemático requerido para enseñar matemática, y han podido establecer que el CPC de los profesores es un significativo predictor de los logros de aprendizaje matemático de los alumnos. Según Ball et al. (2001), en el CPC en particular, subyacen el desarrollo y selección de tareas, la elección de las representaciones y explicaciones, la facilitación del discurso productivo del aula, la interpretación de las respuestas de los estudiantes, el control de la comprensión del estudiante, y el análisis rápido y correcto de los errores de los estudiantes y de sus dificultades.

Las investigaciones centradas en la caracterización del conocimiento pedagógico del contenido de profesores en formación inicial se construyen sobre la relación que debe existir entre la comprensión de las nociones matemáticas, y la articulación de dicha comprensión cuando se piensa en las nociones matemáticas como objetos de enseñanza-aprendizaje (Llinares, 1998). Varios investigadores han tratado de definir y desarrollar la categoría del conocimiento del profesor, además de la experticia para la enseñanza de las matemáticas.

Wilson, Shulman y Richert (1987) llevaron a cabo una serie de estudios y exploraron ideas sobre cómo el conocimiento influye en la enseñanza, e indicaron que el conocimiento de cómo enseñar el contenido es tan importante como el conocimiento del contenido, lo que afecta la efectividad de los profesores. Ellos propusieron tres categorías para el conocimiento de los profesores de matemáticas: (a) el conocimiento del contenido, que incluye hechos y conceptos en un dominio, así como por qué son verdaderos y cómo el conocimiento se genera y estructura; (b) el conocimiento pedagógico del contenido, que incluye representaciones de ideas de contenido específico y el conocimiento de cuáles son los puntos difíciles y los simples para que los estudiantes aprendan un contenido específico; (c) un conocimiento curricular, que incluye el conocimiento de cómo los temas se estructuran dentro y cruzan durante la escolaridad y el conocimiento de la utilización del material curricular.

Basándose en el modelo de Shulman, el estudio de Fennema y Franke (1992) incluye cinco componentes de los conocimientos del profesor: el conocimiento del contenido de matemática, el conocimiento de la pedagogía, el conocimiento de las cogniciones de los estudiantes, los conocimientos del contexto específico, y creencias de los profesores. Basado en el trabajo de Shulman, An, Kulm, y Wu (2004) dirigen el conocimiento pedagógico del contenido como una conexión entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico. Ball y sus colegas (Ball y Bass, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001) señalan en su serie de investigaciones que la habilidad de descomprimir el contenido matemático para hacerlo comprensible a los estudiantes, es otra categoría de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas.

Con muchas categorías de conocimiento planteados por los investigadores, la atención se ha centrado en cómo medir los conocimientos de los profesores (An, 2009). Varios métodos cualitativos se han usado para explorar en profundidad cómo los profesores utilizan diversas estrategias para explicar y representar el contenido matemático a sus alumnos (Ma, 1999; An, Kulm, y Wu, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Park y Oliver, 2008; Watson 2008).

Como se ha señalado, hay pocos estudios empíricos a la fecha que evalúen las componentes del conocimiento del profesor y las usen para predecir la calidad de la enseñanza y los logros de los estudiantes. Los métodos cuantitativos han sido utilizados en Norteamérica por Hill, Rowan, y Ball (2005); y en Alemania los investigadores, Krauss et al.(2008), y Baumert et al. (2010) para explorar la relación entre los logros matemáticos de los estudiantes y el conocimiento de sus profesores relacionado con las matemáticas. Aunque muchos investigadores utilizan diferentes instrumentos en su enfoque empírico para medir los conocimientos de los profesores, pocos instrumentos pueden aprovechar los conocimientos del profesorado directamente (Krauss, 2008). "…pocos estudios se han centrado en la conceptualización de este dominio, y aún menos se han centrado en la medición de este conocimiento (Hill, Ball, Schilling, 2008; Reporte MT21, 2007, p. 12).

Otros investigadores también han aplicado la teoría de Shulman sobre temas específicos de contenido: fracciones equivalentes (Marks, 1992), funciones (Sánchez y Llinares, 2003); decimales (Stacey etc, 2003), álgebra (Ferrini-Mundy, Senk y McCrory, 2005), división multi-dígitos (An, 2009), estadística (Sorto, 2006, entre otros). En Chile, Varas y Lacourly (2010) han investigado en aritmética y geometría de educación básica, y comparado con evaluaciones del grupo de Michigan.

Pinto (2010) revisa diferentes trabajos publicados sobre el CPC, y encuentra que el mayor número de investigaciones ha sido sobre el conocimiento del contenido a enseñar (cerca del 88%), mientras que menos de la mitad han estudiado el conocimiento pedagógico específico del contenido o del conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante. Los temas más investigados fueron las fracciones y las funciones. La tabla 8 expone el resumen de esta revisión.

Tabla 8: Temas y énfasis sobre el o los componentes estudiados del CPC en el campo de la educación matemática, (modificado desde Pinto, 2010).

Autor(es)/año	Tema	Énfasis o componente del CPC Estudiado*
Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988)	Resolución de problemas aritméticos	CC, CR, CRAC
Wallece (1990) Geometría	Geometría	CC
Marks (1990a y 1990b)	Fracciones	CC, CR, CRAC
Even (1990)	Funciones	CC
Hutchison (1992)	Fracciones	CC
Even (1993)	Funciones	CC, CR
Llinares, Sánchez (1994)	Fracciones	CR
Even y Tirosh (1995)	Funciones y operaciones matemáticas indefinidas	CC, CR
Baturo y Nason (1996)	Medición	CC
Swenson (1998)	Probabilidad	CC, CR, CRAC
Fan (1998)	Pedagogía en matemáticas	CC (currículo)
Howald (1998)	Funciones	CC
Smith (2000)	Matemáticas para estimulación temprana	CC, CR, CRAC
Wanko (2000)	Matemáticas en general	CC, CR, CRAC
Durand (2003)	Números racionales	CC, CR
An, Kulm y Wu (2004)	Fracciones	CRAC

*CC es el conocimiento del contenido; CR conocimiento de las representaciones y estrategias instruccionales; y CRAC es el conocimiento de la relación del alumno con el contenido.

4.8 Hallazgos sobre el CPC de los profesores de matemáticas

En la revisión y análisis realizado por Pinto (2010) a los estudios sobre el CPC, él identifica algunos elementos comunes a la educación matemática, producto de los resultados reportados por los autores:

(a) serios problemas en la adquisición, dominio y uso del conocimiento del contenido a enseñar por parte del profesor;

(b) los profesores tienen dificultades para establecer la relación entre el conocimiento del contenido a enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante;

(c) a partir del pobre conocimiento del contenido a enseñar, limitado o nulo conocimiento de la didáctica específica y del conocimiento del estudiante;

(d) necesidad de planear, desarrollar, implementar y evaluar programas de formación de profesores con enfoques diferentes a los actuales, a la luz de la didáctica de las matemáticas;

(e) recomendación de principales fuentes de formación del CPC, como la investigación de la didáctica de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores, la reflexión sobre y de la acción, la experiencia profesional y personal del docente, la interacción entre colegas, lecturas, entre otros; y

(f) confirmación de algunas relaciones significativas, como son las concepciones de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y el CPC, así como entre los niveles altos de CPC y la actitud positiva del profesor, y el conocimiento del contenido a enseñar vinculado con la experiencia docente del profesor como elementos diferenciadores del profesor con poca experiencia.

Existen algunos estudios cuyos resultados se contraponen o difieren entre sí, y estos hallazgos dan cuenta de que el estudio del CPC, aunque interesante, resulta todavía complejo como modelo teórico para la formación de profesores y como objeto de estudio (Pinto, 2010; Olfos y Estrella, 2010b, 2010c).

Al igual que Grossman (2008a, 2008b) la investigación sobre el conocimiento del profesor reconoce que el CC matemático necesario para la enseñanza de gran calidad no es el conocimiento matemático general que se recoge incidentalmente, sino el conocimiento específico de la profesión que se adquiere en la formación de nivel universitario y puede ser cultivado a través de la práctica reflexiva. Las experiencias y lecturas de la Didáctica francesa y el Estudio de Clases japonés, concuerdan que teniendo una sólida base matemática de nivel escolar, la reflexión sistemática del profesor de la propia experiencia en la sala de clases, tanto individual como grupal, inciden en la calidad de la enseñanza (Isoda, Arcavi, Mena, 2007; Isoda y Olfos, 2009).

4.9 Investigaciones sobre el CPC y la Estadística

La International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) y la International Association for Statistical Education (IASE) convocaron en el año 2006 a investigadores, profesores e instituciones formadoras de profesores a participar en el estudio “Educación Estadística en la Matemática Escolar: Retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor” para analizar la enseñanza de la Estadística en el nivel escolar y proponer recomendaciones sobre cómo mejorar la formación de los profesores de Estadística para tener mayor éxito al formar estudiantes estadísticamente cultos. En su documento de discusión reconocen la necesidad de estudiar sobre el CPC e incluyen, como parte de los tópicos del foco de atención de las actitudes, conocimientos, concepciones y creencias de los profesores, con relación a la Educación Estadística. Las preguntas orientadoras del trabajo fueron: “¿qué instrumentos de investigación y estrategias son útiles para determinar qué conocimiento de Estadística y de Enseñanza de la Estadística tienen los profesores?”, “¿qué conocimiento pedagógico del contenido básico y qué competencias requieren los profesores para enseñar satisfactoriamente estadística en diferentes niveles escolares?” y “¿cómo se relacionan estas competencias?”, (Pinto, 2010).

Burgess (2007) estudia sobre la Enseñanza de la Estadística, y plantea un marco para indagar en el conocimiento del profesor en estadística, basándose en aspectos del conocimiento matemático del profesor y sobre los fundamentos del Pensamiento Estadístico. Una de las conclusiones de Burgess es que el marco teórico propuesto en su tesis puede usarse para investigar el conocimiento del profesor, así como el conocimiento de la enseñanza de la estadística. Este autor afirma que los componentes “conocimiento del contenido y estudiantes” y pensamiento estadístico en investigaciones empíricas “conocimiento del contenido y enseñanza” quedan agrupados según el CPC de Shulman; y también concluye que dada la diferencia entre los aprendizajes matemáticos y estadísticos, algunos de los componentes de Ball y colaboradores pueden no ser adecuados para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

En el año 2007, Sorto presentó un trabajo doctoral cuyo propósito fue evaluar el conocimiento de futuros profesores de estadística a nivel secundario a través del diseño de clases. Para la autora, dos aspectos importantes que se entrecruzan en el currículum para el aprendizaje y enseñanza de la Estadística son el conocimiento conceptual del contenido y el CPC. Señala que la pregunta que los formadores de profesores se hacen es ¿cómo medir estos aspectos del conocimiento que aunque son diferentes están relacionados? Sorto afirma que la evaluación del conocimiento conceptual ha sido estudiado y que existen muchas sugerencias al respecto; sin embargo, el CPC referido a Estadística todavía está en una etapa preliminar de estudio.

Noll (2007) en su disertación doctoral en Educación Matemática, investigó sobre el conocimiento estadístico para la enseñanza (statistical knowledge for teaching) de ayudantes de nivel universitario (teaching assistant). Estudió el conocimiento del profesor utilizando el constructo de conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) de Ball. En su trabajo doctoral, Noll hace referencia al “conocimiento estadístico para la enseñanza” como lo hicieron Sorto y White (2004) y Burgess (2007), pero no ocupa el CPC como marco teórico para estudiar el conocimiento del profesor sino como referente.

Shaughnessy (2007, citado por Pinto, 2010) en su capítulo sobre la “Investigación sobre el Razonamiento y Aprendizaje de la Estadística” en el Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, afirma que es necesario estudiar cuál es el conocimiento estadístico necesario para la enseñanza. Propone que es importante averiguar el conocimiento sobre los errores y dificultades de los estudiantes, ejemplos y contraejemplos y tipo de conocimientos que hacen más efectiva y eficaz la enseñanza, explorar sobre lo necesario para enseñar Estadística. En este sentido hace referencia a los trabajos de Ball y colaboradores (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) y del CPC de Shulman.

La disertación doctoral de Pinto (2010) tuvo como objetivos describir las concepciones que tienen los profesores sobre la Estadística, su enseñanza y aprendizaje y, más concretamente, sobre la representación gráfica, así como el conocimiento que tienen del tópico, de las estrategias y representaciones instruccionales y del conocimiento del estudiante sobre la representación gráfica en Estadística. El estudio explora la cognición del profesor de estadística a la luz del CPC, centrado en el conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales y el conocimiento del estudiante. Los resultados de su estudio revelan que el CPC de cada profesor está influenciado por su concepción hacia la matemática y la estadística, la formación que recibió como estudiante y la experiencia que tiene en investigar en contextos diferentes a la matemática.

El trabajo doctoral de Coutanson (2010) trabaja implícitamente el CPC, pero explícitamente trabaja en el marco de la didáctica francesa, en la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, en los campos conceptuales y los trabajos de Gérard Vergnaud, sobre la transposición didáctica y la institucionalización de los saberes de Yves Chevallard, y sobre la investigación de Jean Claude Régnier, relativa a la Didáctica de la Estadística, así como los aportes de Raymond Duval sobre los registros semióticos en el aprendizaje de los estudiantes. Coutanson estudia la enseñanza de la estadística en la escuela primaria en Francia y, más concretamente, aborda el problema de la Educación Estadística y la formación del Pensamiento Estadístico. Su trabajo detecta invariantes, como la tendencia a convertir en operaciones aritméticas las situaciones implícitamente estadísticas, una escasez en el empleo de registros semióticos y de vías semióticas, y la estandarización de las formas de representación y de las tareas exigidas a los estudiantes.

4.10 El Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas

El Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, iniciado por Guy Brousseau en la década de los 70, se construye a partir de suTeoría de Situaciones, la cual actúa como núcleo generador del paradigma, y de los fundamentos de: la Transposición Didáctica y Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard; la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue y la Reproductibilidad de Situaciones de esta misma autora; la Teoría Herramienta-Objeto de Régine Douady; y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, entre otros autores. Este enfoque constituye un marco teórico robusto, legitimado, que dispone de resultados comprobados y es seguido por una parte importante de la comunidad científica internacional que investiga en esta área, (Espinoza, 2009).

El enfoque epistemológico considera la didáctica de las matemáticas como la “ciencia de las condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones”, (Brousseau, 1994). Un postulado básico de la Didáctica de las Matemáticas plantea que, para que los estudiantes encuentren el verdadero sentido y significado de los contenidos matemáticos que estudian, deben necesariamente enfrentarse con las situaciones problemáticas características de cada uno de ellos, situaciones que no podrían ser resueltas sino con los conocimientos relativos a dichos contenidos.

Chevallard (1985) postula que la investigación de cualquier problemática didáctica debe incorporar el análisis de los conocimientos matemáticos tal cual son reconstruidos en las instituciones de enseñanza, y su correspondiente proceso de transposición didáctica. Este proceso consiste en las sucesivas adaptaciones que deben experimentar los conocimientos matemáticos para ser enseñados. El proceso transpositivo plantea la necesidad de ejercer una vigilancia epistemológica sobre la distancia, necesaria, entre el saber matemático de referencia (saber-sabio) y el saber efectivamente enseñado.

La Didáctica de las Matemáticas utiliza, en sus esfuerzos de modelización, un enfoque sistémico; considera el sistema didáctico formado por tres polos: el profesor, el alumno y el saber, y estudia las interacciones y fenómenos que se producen entre el profesor y el alumno, o un grupo de alumnos, a propósito de la transmisión de un saber matemático.

Según la Teoría Antropológica de lo Didáctico, el proceso de estudio de aprender matemática está constituido por distintas dimensiones o momentos del trabajo que realizan profesor y alumnos, que van desde la exploración auténtica de problemas, a la justificación y sistematización de lo matemáticamente construido, pasando por el trabajo de práctica de los procedimientos.

La ingeniería didáctica se fundamenta en las teorías de situaciones didácticas de Brousseau y de transposición didáctica de Chevallard. Este último, escribió respecto a las relaciones en el sistema de enseñanza “Definir el problema de la Ingeniería Didáctica, ID, es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la Didáctica de las Matemáticas, el problema de la acción y de los medios para la acción, sobre el sistema de enseñanza”.

Artigue sitúa la ID como una metodología de investigación, y la describe por medio de una distinción temporal de su proceso experimental: análisis preliminar; concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; experimentación; y finalmente análisis a posteriori y evaluación.

En los análisis preliminares de la ID se cuentan: el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; y el análisis del campo de restricciones de la situación siguiendo las dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas.

Artigue (1995) afirma: “Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referente a la metodología de la ingenieria ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones”.

El análisis a priori en una ID comprende una parte descriptiva y una predictiva, el foco principal es el estudiante; se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación que él dispone, y se prevén los campos de comportamientos posibles. Aunque el profesor tiene un papel secundario en el análisis a priori, toma un importante rol en la devolución y la institucionalización.

4.11 Articulación tentativa entre la noción de CPC y la Didáctica de la Matemática

Tras esta breve panorámica sobre Didáctica de las Matemáticas, se postula brindar un nexo con la noción de Conocimiento Pedagógico del Contenido.

El concepto de Transposición Didáctica como conocimiento puesto en juego por el profesor en su adaptación del contenido estadístico al nivel escolar, en términos de cómo el profesor comprende la estructura de la materia a enseñar, cómo aprende y transforma el contenido matemático a contenido a enseñar, se relaciona con la componente Enseñanza dentro del marco del CPC adoptado, donde entran en juego en la tarea de enseñar: el conocimiento del currículo, las concepciones y creencias tanto de la disciplina como del aprendizaje, la construcción de las secuencias de aprendizaje relativas al contenido, y los diseños de escenario para el aprendizaje.

Asimismo, el conocimiento del profesor en relación al saber del alumno dentro del marco del CPC, se relaciona con una de las etapas de análisis de la Ingeniería Didáctica, específicamente con el análisis teórico de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución en la situación, y con la acción del profesor en las devoluciones. La naturaleza de la *devolución* es de transferencia de responsabilidad, el profesor plantea una pregunta, transmite a los alumnos un enunciado, involucra a los alumnos en una situación dada; y el nivel de dicha devolución se relaciona principal y directamente con su conocimiento del saber del alumno, sus errores comunes, las dificultades de ciertos temas, como asimismo las estrategias que usualmente ocupan o los conocimientos requeridos para la tarea.

Sin buscar puentes entre sus bases filosóficas o sus teorías de aprendizajes preponderantes, las dos vinculaciones emergen naturalmente, aunque se detecta mayor estructura y profundidad en el desarrollo de la TAD y de la ID en la Didáctica de orientación francesa que la evolución del constructo del CPC. Pareciese necesario desarrollar el foco sobre las representaciones concretizadoras que apoyan la enseñanza efectiva, no aparece claramente analizado y trabajado en ninguna de las dos líneas teóricas. Falta una rama que analice la fuerza y rol de las representaciones en la enseñanza, que integre lo cognitivo con lo didáctico, y cuyas directrices podrían fundarse en la Teoría de Representaciones de Duval y la Didáctica broussoniana.

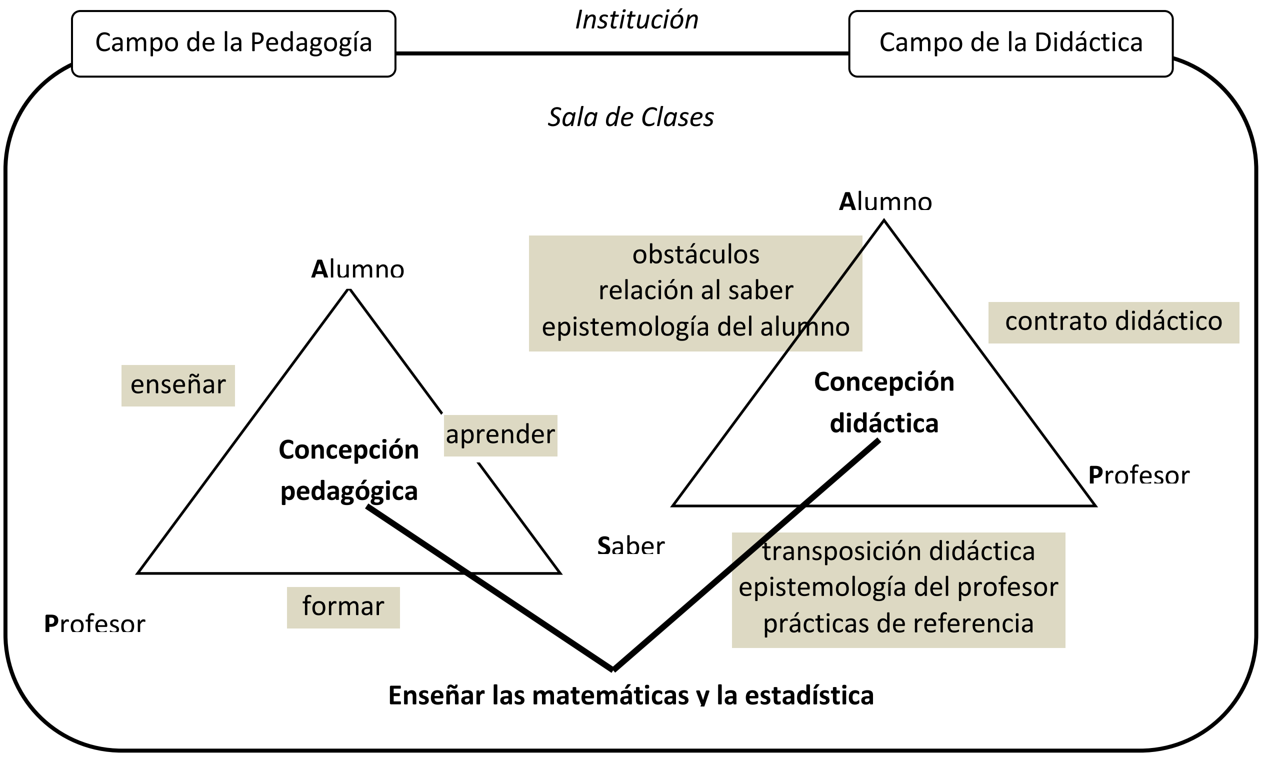


Figura 20: Pedagogía y Didáctica en la acción de enseñar, Regnier (2000).

Por otra parte Reigner (2000) articula las concepciones sobre la pedagogía y la didáctica con la convicción de que ambas determinan la acción de la enseñanza. La figura 20 muestra la esquematización del sistema integrando los dos puntos de vista pedagógico y didáctico que condicionan la acción de enseñar.

CAPITULO 5

ANTECEDENTES SOBRE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

5.1 Introducción

Este capítulo trata de la Estadística y su Didáctica. Desde el enfoque moderno de Enseñanza de la Estadística se presentan los niveles cognitivos de Alfabetización Estadística, Razonamiento Estadístico y Pensamiento Estadístico, profundizando en los distintos procesos involucrados en el Pensamiento Estadístico.

Desde la Enseñanza de la Estadística, se esboza una propuesta del CPC de Burgess relativa a la transnumeración; y se revisan las escasas investigaciones que existen en la actualidad sobre el conocimiento pedagógico del contenido, CPC, y la Estadística.

A través del desarrollo del capítulo se señalan las diversas dificultades y errores que emergen en la Enseñanza de la Estadística y los conflictos semióticos que surgen en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Estadística.

Finalmente se bosquejan algunas de las características de un nuevo perfil del profesor, las que emergen tanto desde el enfoque de desarrollo del Pensamiento Estadístico como de las exigencias que plantea el currículo al profesor de matemática de Educación Básica en la enseñanza de los contenidos del eje Datos y Azar.

5.2 ¿Qué es la Didáctica de la Estadística?

Parte fundamental de la Estadística es descubrir la información que está oculta en los datos, es obtener información cualitativa desde la cuantitativa, y viceversa. Dominar un concepto estadístico consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; como también consiste en convertir unas representaciones en otras.

Para Brousseau la Didáctica es la ciencia que estudia la difusión de los conocimientos útiles a los hombres que viven en sociedad. Se interesa por la producción, la difusión y el aprendizaje de los conocimientos, así como por las instituciones y actividades que los facilitan. Desde su texto original,

> *"…d'une part les opérations essentielles de la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques), les conditions de leur existence et de leur diffusion (l'écologie des savoirs) et les transformations que cette diffusion produit, aussi bien sur ces connaissances (transposition didactique), que sur les utilisateurs (apprentissage, rapport au savoir). D'autre part, les institutions et les activités ayant pour objet de faciliter ces opérations".*

Regnier (2005) entiende la Didáctica de la Estadística como un marco teórico para el estudio de los procesos de comunicación, distribución y adquisición de Estadística, en la situación particular a nivel escolar o universitario. Este autor sostiene que la Didáctica de la Estadística moviliza parte importante de los conceptos desarrollados en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, sin embargo, es en la funcionalidad que la estadística y la matemática como herramientas de disciplina se diferencian. Así, la matemática garantiza la coherencia interna en los modelos, mientras que la estadística juzga la adecuación de los modelos a la realidad, garantizando la coherencia externa.

Chevallard y Mathieu-Wozniak (2006), afirman que formar ciudadanos con un pensamiento de la variabilidad y la gestión de la aleatoriedad no es sólo, hoy, un tema social fuerte: es una cuestión didácticamente fuerte. Estos autores investigan sobre cómo un profesor de matemáticas, concibe y realiza la parte de su enseñanza relativa a la Estadística; ¿Bajo qué restricciones opera?, ¿Por qué las enseñanzas parecen converger hacia una reducción aritmética de la Estadística?, ¿Se pueden modificar estas limitaciones para hacer posible una educación más auténtica epistemológicamente?, ¿Qué pueden hacer los profesores y sus organizaciones profesionales?

En Francia, en la comunidad de didácticos matemáticos, el trabajo de los pioneros fundadores de la Didáctica de la Estadística se puso en marcha con Guy Brousseau (Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas) en la década de los 70, Yves Chevallard (1978) y Claudine Blanchard-Laville (1980, 1981). Desde el enfoque de Brousseau, se busca lo que llama "situación fundamental de la Estadística", o incluso situación típica, situación representativa o situación genérica; es el conocimiento de situaciones estadísticas básicas las que entregan información para elaborar situaciones educativas eficientes para la formación en Estadística. Otra comunidad que investiga sobre la enseñanza de la Estadística es el Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada, España, que ha llegado a publicar un libro titulado "Didáctica de la Estadística" (Batanero, 2001).

5.3 Dificultades en la Enseñanza de la Estadística

Régnier (2003) señala las declaraciones realizadas el año 2000 por el académico francés Jean Dercourt, y aparecidas en un informe de la Academia de Ciencias, "En Francia, la ausencia de formación en Estadística, en universidades, escuelas secundarias y grandes sectores de la educación superior lleva a aberrantes actitudes sociales. (...) ". Con esta declaración Regnier ubica el contexto en el que trata de construir y resolver las problemáticas relativas a la enseñanza y aprendizaje de la Estadística en el campo de la Didáctica de la Estadística.

En la disertación doctoral de Coutanson (2010, p. 152) se exponen las diferencias entre una resolución de una situación estadística y la resolución matemática, concluyendo desde un paralelismo de estas resoluciones "… la especificidad de la resolución de una situación estadística en comparación con su contraparte matemática, se centra en la participación del actor en su elección y por lo tanto la aceptación de riesgos que frecuentemente acompaña a la identificación de las variables implicadas, su especificación, el protocolo de recogida de datos, las medidas de los fenómenos observados, el ordenamiento de los datos, la comunicación de los resultados, su interpretación, o su extensión a toda la población o la anticipación de su evolución en el tiempo, ...".

Los escasos avances en la Enseñanza de la Estadística, y específicamente en Probabilidades los señala Brousseau (2009) "El azar aún es un estigma aunque ahora se cubra con virtudes científicas"; y ahondando en este punto, "A nivel universitario, persisten las dificultades a pesar de la introducción del rigor: el esfuerzo manifestado en un curso se ve frustrado demasiado pronto con ejercicios, a pesar del uso de un formalismo que oculta las dificultades, obstáculos y errores, sin resolverlos. La incomprensión y el desdén se incrementan al desviar el interés a favor de cuestiones puramente matemáticas...".

Hoy en día, la Educación Estadística todavía puede considerarse como una disciplina nueva y emergente, en comparación con otras áreas de estudio y de investigación. Esta nueva disciplina cuenta con una base de investigación que a menudo es difícil de encontrar y aprovechar. Para muchas personas interesadas en la lectura de esta área, la investigación en Educación Estadística puede parecer una disciplina invisible y fragmentada, porque los estudios relacionados han aparecido en publicaciones de diversas disciplinas, y a menudo se han considerado como estudio en las disciplinas (por ejemplo, la psicología, la enseñanza de las ciencias, la enseñanza de las matemáticas, o en la tecnología) más que en el ámbito propio de la Educación Estadística.

En el año 2002 aparece la primera revista científica designada a la publicación de investigaciones de calidad en el área, *Statistics Education Research Journal*. Además de esta revista, los últimos estudios de investigación relacionados al área han sido publicados en actas de congresos como la Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de Estadística (ICOTS, IASE), el Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (PME), el Grupo de Investigación en Educación Matemática de Australasia (MERGA), el Congreso Internacional de Educación Matemáticas (ICME), y el Instituto Internacional de Estadística (ISI). Las numerosas presentaciones y publicaciones de estas conferencias reflejan el hecho de que ahora existe un grupo activo de educadores, psicólogos, y estadísticos que están involucrados con la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística, (Garfield, 2007).

5.4 Enseñanza de la Estadística

En la revisión de literatura las grandes ideas estadísticas señaladas son: los datos, la distribución, variabilidad, centro, aleatoriedad, covariación, muestra, inferencia y modelación. En esta década han aparecido tres conceptos importantes dentro del área de la Enseñanza de la Estadística, la jerarquización según niveles cognitivos fue inicialmente desarrollada por Garfield (2002), y se originó en el aprendizaje de la estadística a nivel licenciatura (educación superior), que desde su origen anglosajón se denominan, Statistical literacy, Statistical reasoning, y Statistical thinking, que traducimos en las expresiones a continuación:

5.4.1 Alfabetización Estadística

La Alfabetización Estadística involucra la comprensión y uso de lenguaje básico y las herramientas de estadística: saber lo que significan términos estadísticos, la comprensión del uso de los símbolos estadísticos, y reconocer y ser capaz de interpretar las representaciones de datos (Rumsey, 2002). Ben-Zvi y Garfield (2004) precisan la Alfabetización Estadística incluyendo habilidades básicas e importantes que se usan para comprender la información estadística, como ser capaz de organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos. Estos autores también incluyen la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre.

5.4.2 Razonamiento Estadístico

Estos últimos autores establecen que el Razonamiento Estadístico se puede definir como lo que hacen las personas al razonar con ideas estadísticas y dar sentido a la información estadística. Esta interpretación implica tomar decisiones basadas en conjuntos de datos, representaciones de los datos, o medidas de resumen estadístico de los datos. El Razonamiento Estadístico puede conectar un concepto a otro (por ejemplo, centro y dispersión), o puede combinar ideas acerca de los datos y el azar. También este razonamiento significa comprender y ser capaz de explicar los procesos estadísticos y ser capaz de interpretar cabalmente los resultados estadísticos.

5.4.3 Pensamiento Estadístico

El Pensamiento Estadístico implica una comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones estadísticas. Esto incluye reconocer y comprender el proceso de investigación completo (desde la pregunta planteada, a la recopilación de datos, a la elección de los análisis, a los supuestos de las pruebas, etc), la comprensión de cómo los modelos se utilizan para simular fenómenos aleatorios, la comprensión de cómo los datos se originan para estimar las probabilidades, reconociendo cómo, cuándo, y por qué las herramientas de inferencia existentes pueden utilizarse, e involucra ser capaz de comprender y utilizar el contexto de un problema para planificar y evaluar las investigaciones y sacar conclusiones (Chance, 2002).

Las definiciones de Alfabetización, Razonamiento y Pensamiento Estadístico se presentan como resultados de aprendizaje en forma separada, pero estos tres dominios se vinculan. La figura 21 muestra la jerarquía de los dominios de aprendizaje definidos, donde la Alfabetización Estadística entrega los fundamentos para el Razonamiento y Pensamiento Estadístico.

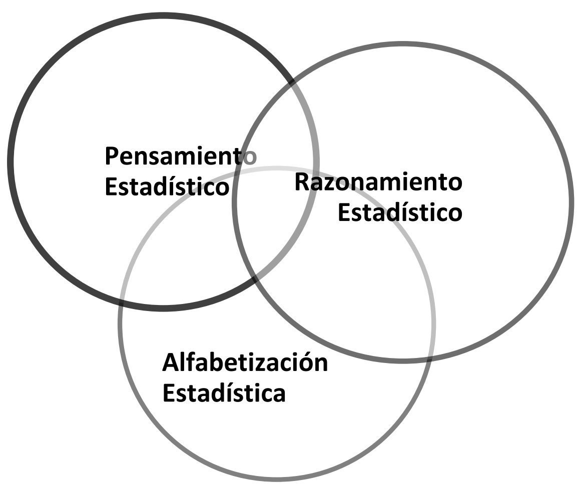


Figura 21: Jerarquía de los dominios de aprendizaje en la Educación Estadística, modificado desde delMas (2002).

En los dominios de Alfabetización Estadística, Razonamiento Estadístico y Pensamiento Estadístico, es posible distinguir las tareas (conocimiento y habilidades) a desarrollar en los estudiantes por cada nivel cognitivo. Es así que la Alfabetización Estadística responde al “¿Qué?”, que identifica, describe, reformula, traduce, interpreta, lee, calcula; el Razonamiento Estadístico responde al “¿Por qué?”, “¿Cómo?”, por lo tanto explica el proceso; y la tercera componente es el Pensamiento Estadístico, que aplica, critica, evalúa, y generaliza (Garfield 2002).

En el diagrama de la figura 22 (Estrella, 2009) elaborado a partir del artículo de Garfield y Ben-Zvi (2007), resume las características de la Alfabetización Estadística:

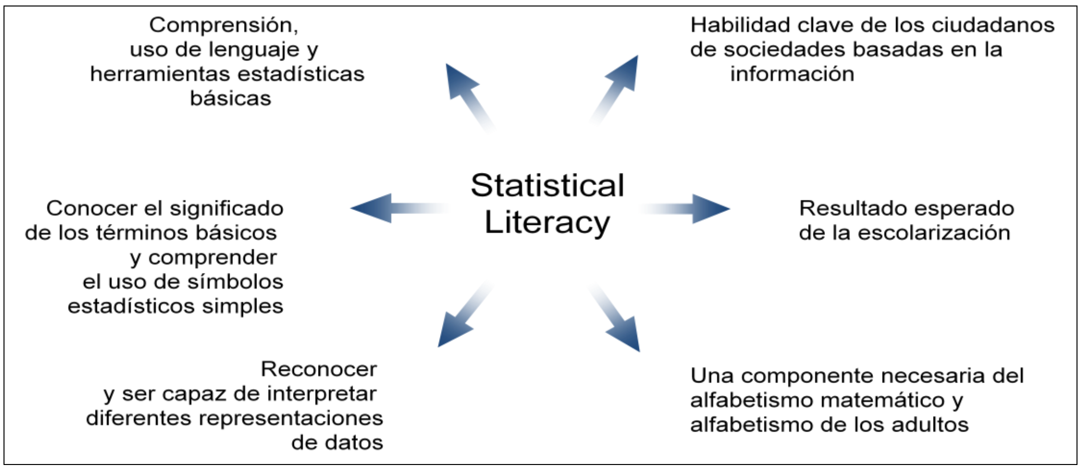


Figura 22: Características de la Alfabetización Estadística.

Si el Razonamiento Estadístico se entiende como la forma en que las personas razonan con las ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística, el Pensamiento Estadístico involucra habilidades de orden superior de pensamiento, mayores al Razonamiento Estadístico, es la forma de pensar de profesionales estadísticos e incluye el conocer cómo y porqué usar un método particular, medir, diseñar o modelar estadísticamente. En la figura 23 (Estrella, 2009) se presentan las características que distinguen al Pensamiento Estadístico:

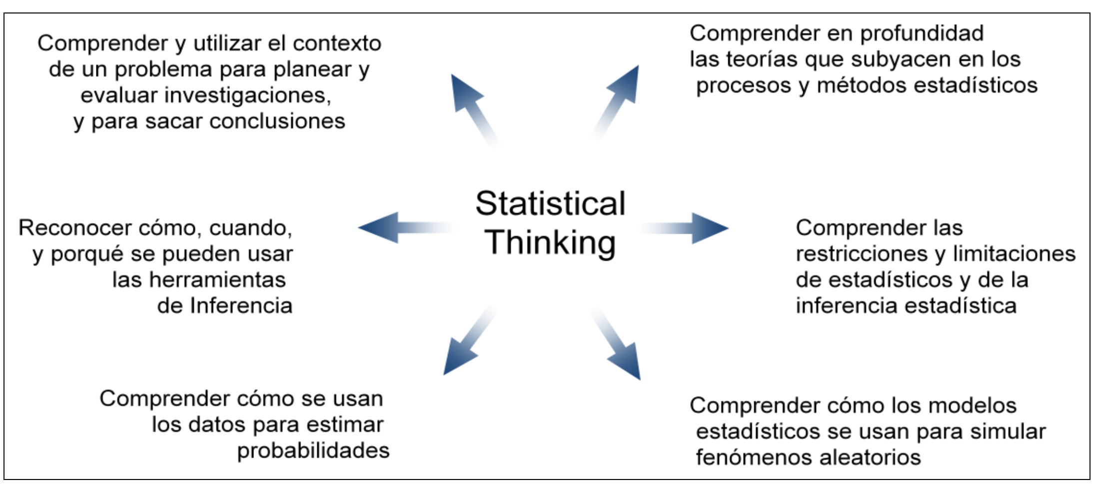


Figura 23: Características del Pensamiento Estadístico.

Astolfi (1993, citado por Regnier, 2003) identifica cinco modos de Pensamiento Estadístico: pensamiento deductivo, pensamiento inductivo, pensamiento dialéctico, pensamiento divergente y pensamiento analógico; y concluye que el Pensamiento Estadístico integra de manera dominante el pensamiento analógico y el inductivo, ver figura 24.

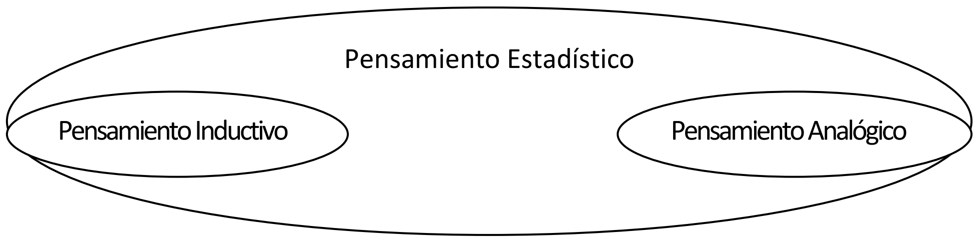


Figura 24: Modos dominantes del Pensamiento Estadístico.

Regnier (2003) sintetiza las características de estos modos de pensamiento como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9: Características principales del pensamiento analógico y el inductivo del Pensamiento Estadístico.

Características principales del pensamiento inductivo	Características principales del pensamiento analógico
Organizar los datos para intentar explicar.	Extender un dominio nuevo establecido en otro contexto.
Superar el nivel de los hechos para acceder a mecanismos explicativos.	Utilizar de manera sistemática, la crítica, la comparación y la metáfora.
Buscar las tendencias, regularidades, evoluciones, invariantes.	

5.5 Fundamentos del Pensamiento Estadístico

Una de las dimensiones que representan aprendizajes importantes a desarrollar como metas de la Educación Estadística es el Pensamiento Estadístico. Una investigación sobre los procesos fundamentales del Pensamiento Estadístico es desarrollada por Groth (2003) en su disertación doctoral. La autora propone un marco del Pensamiento Estadístico escolar, basado en los procesos de describir, organizar y reducir, representar, analizar, y recolectar datos.

Es en la acción de los cinco procesos que emergen los fundamentos en los que descansa el Pensamiento Estadístico, descritos por Wild y Pfannkuch (1999),

(1) el reconocer la necesidad de datos;

(2) la transnumeración;

(3) la percepción de la variación;

(4) el razonamiento con modelos, y

(5) la integración de la estadística y el contexto.

La componente fundamental *reconocer la necesidad de los datos*, base de la investigación estadística, es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden comprenderse a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal y/o la evidencia de tipo anecdótico no son confiables y pueden llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.

La segunda componente es la *transnumeración*; como se señala en el capítulo precedente, indica la comprensión que surge en este proceso dinámico de cambio de representaciones en diversos registros. Por ejemplo, la transnumeración es la capacidad para ordenar datos, crear tablas o gráficos, y encontrar medidas para representar el conjunto de datos.

La tercera es la *percepción de la variación*, que surge de la adecuada recolección de datos y los juicios correctos requieren de la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La variación afecta la formulación de juicios basados en los datos, ya que sin una comprensión de que los datos varían a pesar de los patrones y tendencias que puedan existir, las personas tienden a expresar generalizaciones basadas en un conjunto particular de datos como certezas en vez de posibilidades.

La cuarta componente es el *razonamiento con modelos* estadísticos, y se relaciona con cualquier herramienta estadística que representa la realidad, pero diferenciando el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionando el modelo con los datos. Para que las personas sean capaces de dar sentido a los datos, el Pensamiento Estadístico requiere el uso de modelos. A nivel escolar, los modelos apropiados con los cuales los estudiantes podrían razonar incluyen gráficos, tablas, medidas de resumen (tales como mediana, media y rango).

La última componente fundamental del Pensamiento Estadístico es la *integración de la estadística y el contexto*, que destaca la realización de conexiones entre el conocimiento del contexto y los resultados de los análisis estadísticos para llegar al significado. Es importante vincular continuamente el conocimiento del contexto de una situación objeto de investigación con el conocimiento estadístico relacionado con los datos de esa situación; esta integración permite dar sentido a los datos y una comprensión más profunda de los mismos, y por lo tanto es un indicativo de un nivel mayor de Pensamiento Estadístico. Esta integración ayuda a los estudiantes a comprender que la estadística no se desarrolla alejada de los verdaderos problemas, sino que ocupa números dentro de un contexto (Delmas, 2004, citado por Burguess, 2007).

5.6 Marco integrativo del CPC y Pensamiento Estadístico

Burgess (2007) investiga sobre la Enseñanza de la Estadística, y propone un marco para investigar el conocimiento del profesor en estadística, basándose en aspectos del conocimiento matemático del profesor, estudiados por Hill, Schilling y Ball en el año 2004 y las articulaciones de los dominios del conocimiento matemático estudiados por Ball, Thames y Phelps en el 2005, y sobre los fundamentos del Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) descrito anteriormente.

Su propuesta de cuatro categorías del conocimiento de los profesores en relación a las matemáticas es:

(1) conocimiento común del contenido (habilidad para identificar las respuestas incorrectas o definiciones imprecisas, y la habilidad para completar con éxito los problemas de los estudiantes);
(2) conocimiento especializado del contenido (habilidad para analizar matemáticamente si una respuesta no convencional de un estudiante o una explicación es razonable o matemáticamente correcta, o para dar una explicación matemática de por qué un proceso funciona; por ejemplo, el funcionamiento de un algoritmo particular);
(3) conocimiento del saber de los alumnos (habilidad para anticiparse a los errores de los estudiantes y sus subcomprensiones, para interpretar la idea incompleta o imprecisa de los estudiantes, para predecir cómo los estudiantes trabajarán en tareas específicas, y lo que los estudiantes encontrarán interesante y desafiante);
(4) conocimiento del contenido y la enseñanza (habilidad para secuenciar apropiadamente el contenido para la enseñanza, para reconocer las ventajas y desventajas de las representaciones particulares en la enseñanza, y ponderar lo matemático en el contenido de las respuestas inesperadas que entregan los estudiantes).

El análisis de Burgess representa un primer acercamiento desde la perspectiva de la Educación Estadística por identificar un marco teórico propio sobre el conocimiento del profesor de Estadística. Aunque Burgess desarrolla para cada componente fundamental un marco asociado, en las siguientes líneas sólo se muestra a modo de prototipo, la componente fundamental de transnumeración con el marco teórico del conocimiento pedagógico del contenido, específicamente con el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza.

5.7 La Transnumeración y el CPC

En la tarea de enseñanza, el *conocimiento común del contenido de transnumeración* incluye los conocimientos y habilidades descritas anteriormente, junto con la capacidad de reconocer si, por ejemplo, un estudiante ocupa el proceso o regla correcta para encontrar una medida, habiendo creado una tabla correctamente, u ordenando los datos en forma apropiada.

Un profesor utiliza *conocimiento especializado del contenido de transnumeración*, para analizar si la clasificación, la medida o la representación de un estudiante es válida para los datos, particularmente si el estudiante ha hecho algo atípico y de forma inusual. Esto incluye la habilidad para justificar la elección de cuál medida es más apropiada para un conjunto determinado de datos, o para explicar cuándo y por qué una determinada medida, tabla o gráfico sería más adecuada que otra.

El *conocimiento del saber de los estudiantes de transnumeración* incluyen el conocimiento de los errores comunes y subcomprensiones que los estudiantes desarrollan en relación a las habilidades de transnumeración (incluyendo el ordenamiento de datos, el cambio de representaciones tales como en tablas o a gráficos, y la búsqueda de medidas para resumir los datos); la habilidad para interpretar las descripciones incompletas o "desordenadas" de los estudiantes (en cómo ellos las ordenaron, representaron, y usaron las medidas para resumir los datos); una comprensión de cómo los estudiantes se ocuparían de las tareas de transnumeración, y una conciencia de cuáles visiones de los estudiantes pueden relacionarse con el desafío, la dificultad, o el interés en la tarea de transnumeración.

El *conocimiento del contenido y la enseñanza en la Transnumeración*, es la habilidad del profesor para planificar una secuencia de enseñanza apropiada en relación con la transnumeración de datos, comprender cuáles representaciones pueden ayudar u obstaculizar el desarrollo de las habilidades de los estudiantes de transnumeración, y decidir desde un punto de vista estadístico cómo reaccionar a la respuesta del estudiante.

5.8 La enseñanza de las representaciones gráficas

Con el fin de desarrollar un pensamiento más sofisticado dentro del proceso de Representar Datos, se debe desarrollar tanto la comprensión gráfica y el sentido gráfico.

La comprensión gráfica históricamente ha sido definida como leer e interpretar gráficos. Tres conductas se relacionan con la comprensión gráfica: traducción, interpretación, extrapolación/interpolación (Jolliffe, 1991; Wood, 1968, citados por Friel, Curcio y Bright, 2001).

La idea de sentido gráfico introducida por Friel, Curcio y Bright es descrita como una gama de conductas, como leer, describir, interpretar, analizar y extrapolar/interpolar datos desde los gráficos. De acuerdo con estos autores, el sentido gráfico se desarrolla gradualmente como resultado del diseño de presentaciones gráficas de datos, explorando su uso en una variedad de contextos que requieren dar sentido a los datos, y relacionándolos de manera que no se limiten a la construcción gráfica o a la extracción de datos simples.

El construir gráficos es una actividad del tratamiento de datos, y puede ser conceptualizado como un proceso por el que las personas puedan establecer relaciones entre datos, e inferir información a través de la construcción y de la interpretación de gráficos.

Si situamos al gráfico como una construcción, se pueden enumerar algunos elementos estructurales similares: el título y los rótulos indican el contenido contextual del gráfico y cuáles son las variables representadas; el marco del gráfico incluye los ejes, escalas, líneas de división, y marcas de referencia en cada eje, entre otros; los especificadores del gráfico, son las dimensiones visuales usadas para representar los datos, como los rectángulos en el histograma o los puntos en el diagrama de dispersión son los elementos usados para visualizar los datos, los rótulos de los datos y fondo (de cualquier color, rejillas, y las imágenes sobre las que el gráfico puede presentarse).

Sin embargo, la familiaridad con estos componentes no es suficiente para asegurar la comprensión de un gráfico particular: la composición de un gráfico puede no entenderse porque el contexto puede ser un factor clave en la comprensión de los elementos de un gráfico. Friel, Curcio y Bright (2001) alertan de que no todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender sugiriendo el siguiente orden de dificultad: posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); longitud (gráficos poligonales, árboles), ángulo o pendiente (diagrama de sectores, discos), área (círculos, pictogramas), volumen (cubos, algunos mapas estadísticos) y color (mapas estadísticos codificados mediante color).

5.9 Taxonomías de comprensión de gráficos

Postigo y Pozo (2000, citados por García, 2005) proponen que la interpretación de una gráfica es un proceso en el que los sujetos interpretan la información gráfica en tres niveles de procesamiento como parte de un continuo: nivel de procesamiento de la información explícita, nivel de procesamiento de la información implícita, y nivel de procesamiento de la información conceptual.

Bertin (1967), citado por Arteaga (2009), sugiere que la lectura de un gráfico comienza con una identificación externa del tema al que se refiere, a través de la comprensión del significado del título y los rótulos de los ejes. Luego se requiere una identificación interna, de las dimensiones relevantes de variación en el gráfico, es decir, las variables representadas y sus escalas. Finalmente se produce una percepción de la correspondencia entre los niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada variable y sus relaciones en la realidad representada. A partir de estos supuestos, define niveles de lectura de un gráfico: *Extracción de datos* (que consiste en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje), *Extracción de tendencias* (percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente), *Análisis de la estructura de los datos* (comparar tendencias y efectuar predicciones).

Otra muy similar a la anterior en cuanto a niveles de lectura, que ha tenido un gran impacto en Educación Estadística se debe a Curcio (1989), quien define tres tipos de comprensión de gráficos, —el cuarto tipo es de Friel, Curcio y Bright (2001) —:

(1) "leer datos", en este nivel de comprensión se requiere una lectura literal del gráfico, no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo, es decir se atiende únicamente los hechos explícitamente representados,
(2) "leer entre los datos" implica la interpolación y la integración de los datos en el gráfico, esto incluye comparar y aplicar las operaciones matemáticas a los datos, y aplicar destrezas matemáticas; y el tercer tipo,
(3) "leer más allá de los datos" implica la extrapolación de datos, predecir e inferir a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.
(4) "leer detrás de los datos" es la ampliación de la clasificación anterior luego de una década de Friel, Curcio y Bright (2001), y consiste en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

En Friel, Curcio y Bright (2001) se amplía la información sobre la clasificación de Curcio como taxonomía de los niveles de comprensión gráfica, que se incluye a continuación en la Tabla 10. En esta versión, los autores incorporan una denominación diferente para cada nivel: elemental (extraer información de los datos), intermedio (encontrar relaciones en los datos), y en conjunto (ir más allá de los datos).

Tabla 10: Taxonomía de habilidades requeridas para la comprensión.

ELEMENTAL Leer datos (extraer información de los datos)	INTERMEDIO Leer entre los datos (encontrar relaciones en los datos)	EN CONJUNTO Leer más allá de los datos (ir más allá de los datos)
· Lectura literal del gráfico · Simplemente identificar los hechos explícitamente en el gráfico · Extraer información elemental · Identificar la información encontrada en el título del gráfico y las etiquetas de los ejes · No hay interpretación · Es un nivel cognoscitivo muy bajo de tarea · Observar simples hechos y relaciones en los datos presentados gráficamente · Interpretar relaciones cuando las respuestas están parafraseadas o expresadas en los hechos · Identificar o leer los especificadores del gráfico	· Interpretación de los datos en el gráfico · Habilidad para comparar cantidades (ej. más grande, más pequeño) · Uso de otros conceptos matemáticos o técnicos (ej. adición, sustracción) · Identificar las relaciones matemáticas expresadas en el gráfico · Es lo que la mayoría de las pruebas evalúa · Requieren al menos de la etapa de lógica e inferencia pragmática necesaria · Tanto las preguntas como las respuestas se derivan del texto · La respuesta está basada en los datos presentados en el gráfico · Reducir el número de categorías de los datos a través de una compilación y combinación de operaciones · Observar relaciones en un gráfico e interpretarlas como una presentación visual sin referencia al significado de elementos del gráfico en el contexto · Interpretar relaciones · Identificación de tendencias en las partes de los datos · Comparación local o global de las características del gráfico y mayor atención a los especificadores	· Predecir o inferir de los datos · Utiliza esquemas de exploración previos (ej. conocimiento previo, conocimiento memorístico) · La inferencia está hecha sobre una “base de datos” en la mente del lector, no en el gráfico · Reducción de todos los datos a simples enunciados o relaciones · Interpretar relaciones cuando las respuestas requieran enunciados que vayan más allá de la relación o de los términos técnicos · Determinar los valores de los datos que se expresan en el gráfico como evidencia para apoyar o rechazar una proposición · Autoevaluar la propia evidencia generada por los datos cuantitativos · Comprender la estructura profunda de los datos en su totalidad, comparando tendencias y observando grupos · Síntesis o integración de las mayoría o de todos los valores graficados

Nota Fuente: Taxonomía de comprensión gráfica según Curcio (1987) y Friel, Curcio y Brigth (2001), obtenida desde Pinto (2010).

Varios autores han subrayado la importancia del sentido crítico como parte de la Alfabetización Estadística (Gal, 2002), esto significa la capacidad de mirar detrás de los datos y analizar profundamente la información y sus interrelaciones en lugar de limitarse a aceptar la impresión inicial dada por el gráfico. Esta es una habilidad gráfica relacionada con el rol de los ciudadanos en la sociedad.

Aoyama (2007) estudia 5 niveles de lectura de gráficos por parte de los estudiantes, el Nivel 1 - *Idiosincrásico* (los estudiantes no pueden leer los valores o tendencias en los gráficos, establecen valores incorrectos en la lectura del gráfico, no son capaces de relacionar diversas características extraídas del gráfico con el contexto, sus razonamientos se basan en la escasa experiencia individual o exclusivamente desde una perspectiva personal); el Nivel 2 - *Lectura básica del gráfico* (los estudiantes pueden leer los valores y las tendencias de los gráficos, pero no pueden explicar el significado contextual de las tendencias o características que ven, ni contextualizar los hechos consignados; el Nivel 3 - *Racional/Literal* (los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción; y explican significados contextuales, literalmente, en términos de características que se muestran en el gráfico, pero no pueden sugerir interpretaciones alternativas, sino que sólo utilizan los significados presentados, y son incapaces de cuestionar la fiabilidad de la información); el Nivel 4 - *Crítico* (los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis); y el Nivel 5 - *Hipotético* (los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información; forman sus propias hipótesis explicativas o modelos, ellos actúan como investigadores estadísticos activos y no sólo como receptores de información).

Aoyama señala que la importancia del Nivel Crítico fue destacado con bastante anterioridad (cita a Huff, D. (1954), "How to lie with statistics") y sólo recientemente ha sido reconocido como una de las prioridades de la Educación Estadística en el contexto de la Alfabetización Estadística.

Mayén (2009) considera que una vez que los estudiantes llegan a la fase superior de la categorización de Curcio, y en función de su capacidad crítica respecto a la información reflejada en el gráfico, se pueden diferenciar los tres grupos descritos por Aoyama, el Nivel Racional/Literal, el Nivel Crítico y el Nivel Hipotético.

5.10 Los profesores y la enseñanza de la Estadística

En el año 2004, un grupo de trabajo abocado en el desarrollo curricular de la Estadística conformado por Gabriella Ottavani, Roxy Peck, Maxine Pfannkuch y Allan Rossman, establecen entre los aspectos generales y preocupaciones que los profesores: no están bien preparados para enseñar estadística y análisis de datos; deben poseer un conocimiento más amplio y profundo que el de los estudiantes a los que están enseñando; deben disponer de mecanismos para la comprensión de la Estadística y análisis de datos; requieren entender el "panorama general", de modo que puedan concebir dónde están y hacia dónde van sus estudiantes; los profesores necesitan más experiencia en todo el proceso de las investigaciones estadísticas, así como la producción y análisis de datos; ellos necesitan comprender la importancia del contexto y la interpretación; los profesores tienen que entender que la Estadística es diferente de la Matemática, como dos disciplinas diferentes, y cada una con su propio conjunto de objetivos; los profesores deben concebir que la Estadística implica una nueva manera de pensar y por lo tanto una forma diferente de enseñanza.

Este grupo sugiere que los profesores necesitan comprender la utilidad y las aplicaciones de la Estadística, ellos necesitan entender que la Estadística y análisis de datos son necesarios en un mundo global. También aconsejan que se familiaricen con el uso de la tecnología, tanto como un instrumento para llevar a cabo análisis estadísticos como una herramienta para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos estadísticos.

También realizan sugerencias a los educadores de profesores para que los primeros piensen tanto en el servicio y la capacitación previa al servicio. El objetivo debe ser ver la formación en servicio como el crecimiento verdaderamente profesional en lugar de una intervención correctiva. A nivel de pre-servicio, deben desarrollarse nuevos cursos, cuyos objetivos sean la preparación de los futuros docentes para alcanzar el nivel de comprensión descrito anteriormente. Existe una gran necesidad de desarrollar recursos para los profesores, incluyendo materiales de alta calidad de la enseñanza.

Proponen como un modelo útil para el desarrollo profesional, ayudar a los profesores creando comunidades de práctica que puedan apoyar el cambio en el profesor. Una comunidad de práctica puede crearse en una sola escuela o incluso a través de las escuelas.

Es importante que los profesores sean vistos como profesionales y que los profesores se vean a sí mismos como profesionales. Es así que los profesores deberían tener un profundo conocimiento de los planes de estudio y comprender la razón de los materiales y las actividades seleccionadas y por qué el contenido se presenta de una manera. Los profesores deben ser reconocidos en el papel crítico que desempeñan en el diseño y desarrollo de currículo y evaluación.

El grupo propone un acercamiento entre teoría y práctica, buscando formas de facilitar una difusión más amplia de la investigación en Educación Estadística, a fin de que puedan informar los resultados de la investigación y plasmarlas en el desarrollo curricular, en los libros de texto y otros materiales, y en la misma práctica docente.

Sorto (2004) sintetiza las tareas específicas que demanda el conocimiento del contenido para el análisis de datos estadísticos según los niveles cognitivos de la Enseñanza de la Estadística de Garfield (2002), ver tabla 11.

Tabla 11. Resumen de tareas específicas del CC según niveles cognitivos de Garfield.

Alfabetización Estadística	Razonamiento Estadístico	Pensamiento Estadístico
• Identificar datos categóricos y numéricos • Crear y leer información expresada en representaciones de datos • Encontrar y calcular la media, mediana y moda • Encontrar y calcular el rango • Identificar las agrupaciones, los vacíos, outliers, simetría y asimetría	• Formular preguntas a partir de una recolección de datos • Comprender lo que constituye una muestra aleatoria • Comprender cómo se realizan las encuestas y cómo se diseñan los experimentos. • Interpretar e integrar información de representaciones de los de datos • Interpretar lo que las medidas de centro y dispersión dicen acerca de los datos • Identificar los malos usos en las interpretaciones causa-efecto de la correlación	• Tomar decisiones sobre qué y cómo medir • Extender, predecir o inferir a partir de la información en representaciones de datos para responder a preguntas implícitas • Utilizar la dispersión y la forma de un conjunto de datos para emitir juicios acerca de la exactitud y fiabilidad de los datos y hacer inferencias a partir ellos • Usar medidas de centro para hacer predicciones e inferencias a partir de datos sobre el grupo al que los datos pertenecen

Nota Fuente: Sorto (2004).

Esta autora propone siete grandes contenidos en la Enseñanza de la Estadística, basándose en las demandas cognitivas para el aprendizaje de los contenidos estadísticos dentro del tema de Análisis de Datos, y de los programas oficiales de EEUU desde el nivel preescolar hasta la educación media: formulación de preguntas, diseño de estudios y colección de datos; representación categórica de datos en gráficos de barras, circular, pictogramas y tablas; la representación numérica de datos en gráficos de tallo y hoja, histograma y de cajas; la representación bivariada de datos en gráficos de dispersión, lineal y regresión; las formas de distribución según formas de distribución de datos, simetría, curtosis, valores atípicos (ouliers), conglomerados; las medidas de tendencia central como media, mediana y moda; y las medidas de dispersión como el rango, rango intercuartil y la desviación estándar.

Con esta agrupación Sorto diseñó un instrumento dirigido a profesores que denominó Evaluación del Conocimiento Estadístico para la Enseñanza (Statistical Knowledge for Teaching Assessment), sus objetivos eran valorar el conocimiento estadístico de los profesores sobre el tema de la representación de datos, y explorar este conocimiento estadístico aplicado a la enseñanza.

Entre las conclusiones y propuestas tras la finalización del proyecto europeo EarlyStatistics de la Unión Europea (Meletiou-Mavrotheris, 2008), se indica que para que los estudiantes desarrollen una alfabetización estadística y progresen hacia el pensamiento estadístico, debe haber cambios importantes en los métodos y herramientas empleados normalmente en las salas de clases para enseñar Estadística. Reconocen el hecho de que los profesores están en el centro de cualquier esfuerzo de reforma educativa para enriquecer el aprendizaje de los niños en Estadística, y por ello se requiere ofrecer a los profesores un desarrollo profesional con las mejores prácticas pedagógicas en Educación Estadística, de modo de ayudar a forjar la identidad de los profesores como profesionales y generar la identidad de la propia práctica. También sugieren incluir investigaciones abiertas, el uso de datos reales, simulaciones, visualizaciones, la colaboración y la reflexión sobre las ideas propias y las ideas y experiencias de otros, con el fin que los profesores ayuden realmente a sus estudiantes a construir su razonamiento estadístico.

5.10. 1 Dificultades de los profesores

Otra investigación en España, sobre un centenar de futuros profesores de educación primaria sobre el tratamiento de algunos objetos matemáticos-estadísticos básicos, como los gráficos estadísticos, medidas de posición central y dispersión, concluyeron: “Respecto a la interpretación de gráficos, nuestros resultados indican que es una habilidad altamente compleja, y confirma las dificultades descritas por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, a pesar de que han de transmitir el lenguaje gráfico a sus alumnos y utilizarlo como herramienta en su vida profesional. También el trabajo de las autoras proporciona información sobre la capacidad de construcción de gráficos de los futuros profesores mediante una tarea abierta y mostrando que la mayoría de los participantes no consigue elaborar un gráfico de complejidad suficiente para permitir resolver el problema”. (Ruiz, Arteaga y Batanero, 2009, p. 73).

Cobo (2003) en su trabajo doctoral postula que aunque las representaciones gráficas de datos tienen una larga data, desde el trabajo precursor de Playfair (1759-1823) hasta las innovaciones contemporáneas de Tukey (1977), en los currículos actuales y en la actitud de los profesores aún se da poca importancia a los gráficos.

En el trabajo titulado “Quelques obstacles cognitifs dans la lectura de representations graphiques elementaires” de J. Baillé y B. Vallerie (1993), los autores investigan cuáles componentes semióticas y pragmáticas intervienen en el tratamiento de las representaciones gráficas. En el dominio del tratamiento de representaciones gráficas, ellos observaron que los adultos se enfrentan a problemas de proporcionalidad simple en los gráficos, producen juicios erróneos al centrarse únicamente en el ritmo de la pendiente y omiten otros datos —los objetos y las relaciones— como los números y las relaciones entre la pendiente y los puntos de intersección de las curvas con los ejes.

Los resultados de estas investigaciones muestran las enormes dificultades que tienen los estudiantes para pasar de una representación al contenido representado, para verificar que entre dos representaciones en un dado registro semiótico se ha llevado a cabo simplemente una transformación de representación de tipo tratamiento, y para verificar que entre dos representaciones semióticas en dos diferentes registros semióticos se ha dado una transformación de representación de tipo conversión.

El trabajo didáctico sobre las representaciones gráficas estadísticas en última instancia, es más complejo de lo que parece. Se ha evidenciado en muchos países, incluido el nuestro, las limitaciones de la utilización de las representaciones en el contexto escolar, donde las representaciones gráficas conservan sólo un estatus de herramienta. La literatura sugiere que los profesores deberían reevaluar estos significantes como objetos de aprendizaje, con toda la extensión semiótica y de retórica que ello implica.

Falta más investigación en cómo el contenido se desarrolla en las aulas. Cuando el contenido se enseña como una serie de procedimientos, donde los datos, el contexto y la variabilidad son secundarios o irrelevantes, los estudiantes no aprenden verdaderamente Estadística. Estos ejemplos ocurren en diferentes espacios educativos, se generalizan y se hace difícil alcanzar la alfabetización cuantitativa de la sociedad. El reto de los educadores es tomar conciencia de la diferencia entre lo determinístico y lo no determinístico, para identificar y hacer visible la filosofía y principios que intervienen en la Enseñanza de la Estadística.

5.10.2 La propuesta de Análisis Exploratorio de Datos

El Análisis Exploratorio de Datos va más allá de la Estadística Descriptiva, su significado actual enfatiza la organización, descripción, representación, análisis y modelización de datos, y da gran importancia a las representaciones visuales tales como diagramas y gráficos. Hay, por otro lado, diferentes connotaciones del "análisis de datos" en los distintos lugares del mundo. Por ejemplo, en la cultura francesa, *l'analyse de données*, se identifica a menudo con el análisis multivariante y otras interpretaciones en otras culturas incluyen el análisis inferencial, análisis exploratorio y análisis informal de los mismos.

El Análisis Exploratorio de Datos fue introducido por Tukey y ha sido descrito por Gutiérrez (1994, citado por Cobo, 2003) como un híbrido entre los métodos estadísticos exploratorios e inferenciales. El nuevo uso de las representaciones gráficas es, quizás, la mayor contribución del Análisis Exploratorio de Datos al currículo y lo que más posibilidades proporciona de relación con otras áreas de la matemática. El Análisis Exploratorio de Datos está relacionado con un movimiento general en Estadística que potencia y valora el uso de las representaciones gráficas como una buena herramienta de análisis y no sólo como un medio de comunicación. Estadísticos notables, como por ejemplo E. Pearson, han reconocido este carácter de los gráficos como herramienta del trabajo científico (Biehler, 1986).

El Análisis de Datos se ha basado fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, restando importancia a la visualización de la representación de los mismos y equiparando el análisis con el modelo ajustado, cuyo único propósito consiste en poner a prueba una determinada hipótesis, suponiendo que el conjunto de valores se ajusta a un modelo preestablecido, sin pretender explorar cualquier otra información que puede deducirse de ellos (Batanero, Estepa y Godino, 1991).

Una idea fundamental subyacente al Análisis Exploratorio de Datos, es que el uso de diversas y múltiples representaciones de datos implica el desarrollo de nuevos conocimientos e intuiciones. Por ejemplo, pasar de tablas a gráficos, de listas de números a representaciones como la del gráfico tallo y hojas, reducir los números a una variedad discreta en un mapa estadístico para facilitar la exploración de la estructura total, construir gráficos como el de caja que hace posible la comparación de varias muestras, entre otros (Biehler, 1986).

La experiencia con gráficos también puede contribuir a mejorar la comprensión crítica, debido a que los gráficos se utilizan como herramientas que ayudan a centrar la atención en aspectos particulares de los datos y no en la mera presentación de los mismos. Un ejemplo de esta aplicación es visualizar la variabilidad de los datos, representando distintos ejemplos de variables estadísticas mediante una colección de diagramas de caja. Por tanto, estas representaciones pueden usarse para iniciar una comparación, interacción y reestructuración fructífera de la experiencia adquirida con estos diagramas en una fase exploratoria, y en el contexto de la variabilidad aleatoria, los gráficos de caja son una forma interesante de introducir los intervalos de confianza (Biehler, 1994, citado por Cobo 2003).

5.10.3 Dificultades con las representaciones gráficas

Diversos estudios han mostrado que el gráfico, como la palabra, es un objeto semiótico independiente cuya relación con el fenómeno debe ser establecido a través de un largo proceso de trabajo. Algunos autores (Roth y McGinn, 1997; Wilensky, 1991; Ausubel y Novak, 1983, citados por Cobo, 2003) afirman que la capacidad para graficar y utilizar gráficos como dispositivos retóricos es una función de la experiencia, que se va desarrollando a través del tiempo.

Existe una estrecha relación entre la lectura tomada de un modo general y la lectura de un gráfico, por lo que puede tomarse un gráfico como un objeto semiótico. Generalmente, al solicitar a los estudiantes que interpreten o realicen un gráfico, se asume que ellos son capaces de realizar la traducción de la realidad al gráfico que la está representando o viceversa, pero ellos no siempre son capaces de realizar en forma adecuada esta traducción debido a que en muchos casos tienen carencias en sus conocimientos previos o en su experiencia para construir e interpretar gráficos, (Cobo, 2003).

Los profesores suponen a veces que estos conceptos son muy sencillos y dedican poco tiempo a su enseñanza. Sin embargo, elaborar una tabla de frecuencias o un gráfico supone, ya, una primera reducción estadística, pues se pierden los valores originales de cada uno de los datos individuales pasándose a la distribución de frecuencias. Este concepto es complejo, al referirse al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares. Hay que tener también en cuenta que en una tabla o gráfico aparecen (o pueden aparecer) distintos tipos de frecuencias: absolutas, relativas, porcentajes y frecuencias acumuladas.

Los resultados de investigaciones muestran las enormes dificultades que tienen los estudiantes para llegar, a partir de una representación, al contenido representado. Autores como Pereira-Mendoza y Mellor (1990) defienden la necesidad de estudios centrados en el análisis de las dificultades con que se encuentran los estudiantes al manejar gráficos. La literatura acerca de este tema revela que, aunque la capacidad de los alumnos para leer gráficos va aumentando con los años de escolaridad, no ocurre lo mismo con su interpretación, construcción y realización de predicciones basadas en la información aportada por los mismos. Además, como indican varios autores, el uso de computadores facilita la construcción de gráficos, pero no ayuda a su interpretación.

5.10.4 Errores con las medidas de tendencia central

Se han detectado variados errores en relación a las medidas de tendencia central, a modo de ejemplo: cálculo erróneo de las medidas de tendencia central o desviación estándar; confusión entre las medidas de tendencia central; confusión entre varianza y desviación estándar, variabilidad relativa y absoluta; toma de frecuencias negativas; confusión de frecuencia absoluta y acumulada; confusión de percentiles (por ejemplo: P_{20} con P_{80}); asignación intuitiva de propiedades de las operaciones aritméticas elementales que no se conservan para las medidas de posición central; o la no diferenciación entre media de una variable estadística, media de una variable aleatoria y/o media de una distribución muestral, entre otros.

Para los estudiantes es fácil confundir los datos categóricos con los numéricos, y por ello realizan mal uso de la media y la mediana, se les debe resaltar que describen variables numéricas pero no variables categóricas. Aun así, ocupan erróneamente la frecuencia de los conteos al calcular la media o la mediana de una variable categórica.

En relación a la comparación de datos ordinales y la comprensión de las medidas de posición central, Cobo (2003) muestra la existencia de los siguientes conflictos semióticos: (a) no reconocer la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas que se resuelve mediante las medidas de posición central; (b) suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales; y (c) no discriminar datos ordinales y numéricos. Ruiz (2009) señala los conflictos relacionados con definiciones de distintos objetos matemáticos: la confusión de las medidas de posición central con valor de la variable; la media con frecuencias absolutas; frecuencias absolutas con porcentajes; valor de la variable con frecuencia; y no diferenciar datos ordinales y numéricos. Estos autores aseguran que “Estos conflictos son especialmente preocupantes en los estudiantes de Bachillerato, puesto que dificultarán su comprensión de muchos otros conceptos estadísticos que deberán estudiar en la universidad y están basados en las ideas de variable, valor, frecuencia absoluta y relativa y medida de posición central”. (Cobo, 2003, p. 92).

Cobo (2003) y Mayén (2009) encontraron que algunos estudiantes interpretan la mediana como centro del conjunto de datos sin ordenar, conjeturan que este error puede provenir que el estudiante piense que el “orden” al que se refiere la definición de mediana es el orden “natural” en que se dan los datos y no el orden natural numérico.

Mayén (2009) citando a Godino, Batanero y Font (2007) establece que el conflicto semiótico son las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor o investigador. Estos errores de interpretación —conflictos semióticos—, consecuentemente producen equivocaciones en los estudiantes, que no se deben a la falta de conocimientos, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (es decir, la correspondencia entre el antecedente (representante) y su consecuente (representado)).

5.10.5 Errores en la lectura o construcción de gráficos

El objetivo de las investigaciones en el área, ha sido estudiar las capacidades de lectura de los gráficos, y analizar los errores frecuentes en su creación. El primer paso sería elegir un gráfico adecuado, tanto al tipo de variable como al problema planteado, pero los estudiantes reiteradamente fallan con frecuencia en esta elección.

Varios investigadores han analizado las producciones gráficas de los estudiantes asociadas a proyectos estadísticos escolares, y han encontrado alumnos que recurren a polígonos de frecuencias con variables cualitativas, o gráficos de barra horizontal para representar datos que debieran representarse en un gráfico de dispersión; encontrando inclusive gráficos sin sentido, con variables no relacionadas entre sí en un mismo gráfico. También se han registrado errores respecto a las escalas de los gráficos construidos por los estudiantes, o escogen una escala inapropiada para el objetivo pretendido, u omiten las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos; en otros casos, no se especifica el origen de coordenadas, o no incluyen divisiones proporcionadas o suficientes en las escalas de los ejes.

En la recopilación que realiza Arteaga (2009), señala investigaciones sobre la comprensión de gráficos específicos. Los estudiantes tienen errores en el gráfico de barras, sobre todo al usar un diagrama de barras horizontal en lugar de vertical. Otros estudios indican que los rectángulos de los histogramas se perciben como observación particular y no como un intervalo de valores; en otro caso se compara sólo la altura de los rectángulos (y no su área) al tratar de detectar variaciones en el histograma.

Es importante que los estudiantes aprendan tanto el uso adecuado de terminología estadística como el correcto uso de las herramientas estadísticas. Un error común para los estudiantes es el uso inapropiado de un gráfico de barras con datos numéricos. Un gráfico de barras se utiliza para resumir datos categóricos. Si una variable es numérica, el gráfico de barras apropiado es el histograma, para los datos numéricos son apropiados los gráficos de puntos y el de tallo y hojas.

Respecto a los gráficos de caja, conocidos como *boxplot*, Bakker, Biehler y Konold (2004) señalan las dificultades en su interpretación: no permiten percibir los casos individuales; estos gráficos operan diferente que otras representaciones; ocupan la mediana y los cuartiles, conceptos que no son tan intuitivos para los estudiantes.

Las herramientas informáticas de creación de gráficos no contribuyen a mejorar los problemas de los estudiantes, Ben-Zvi y Friedlander (1997) definen cuatro categorías de uso de los gráficos producidos por el computador: *Uso acrítico* (los estudiantes construyen gráficos rutinariamente aceptando las opciones por defecto, aunque no sean adecuadas, también muestran dificultad en valorar las relaciones sugeridas en sus representaciones gráficas, identificando sólo la información obvia, como los valores máximos; *Uso significativo de una representación* (los estudiantes construyen correctamente un gráfico si se les indica cuál han de utilizar; también lo pueden justificar en base al tipo de datos o al problema planteado, son capaces de modificar y transformar el gráfico, cambiando las opciones del software e interpretando los resultados, pero no son capaces de seleccionar el gráfico más adecuado cuando tienen un abanico de posibilidades; *Manejo significativo de representaciones múltiples* (los estudiantes toman decisiones correctas en la selección de los gráficos más adecuados, tomando en consideración la contribución de cada uno a su problema); y *Uso creativo* (producción de un gráfico no habitual en forma correcta para presentar y justificar sus ideas).

En ocasiones la facilidad de utilización del software estadístico induce en algunos casos a producir gráficos sin sentido, y por lo tanto, la comprensión y el sentido gráfico no tienen un espacio para desarrollarse.

5.10.6 Complejidad de la Enseñanza

La complejidad del tratamiento diverso de los conceptos estadísticos hace necesario un periodo dilatado de enseñanza a lo largo de la educación escolar para lograr la progresiva articulación de los significados personales que construyen los alumnos a los significados institucionales que pretende que ellos adquieran. Ayudar a los estudiantes a comprender progresivamente algunas herramientas estadísticas no es un trabajo simple, ya que es necesario adaptar estas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que favorezcan el aprendizaje significativo, y les ayuden a franquear las dificultades, errores y obstáculos.

El desarrollo de las habilidades gráficas no es una acción espontánea; algunos investigadores han detectado errores en la obtención de información espacial y en la traducción del lenguaje coloquial al matemático, por lo cual aconsejan intensificar el trabajo paralelo en diferentes registros de representación. Estas ideas adoptan los errores como fuente de información y son consistentes con un cambio del paradigma pedagógico que propone abandonar la respuesta exacta como única alternativa para optar por el trabajo más enriquecedor que consiste en reflexionar críticamente sobre las propias producciones (Del Puerto et al., 2007). El profesor debe guiar para discutir situaciones estadísticamente relevantes, como las relacionadas con el análisis crítico de los datos o la necesidad de generar nueva información útil (Ainley, 2000; McClain y Cobb, 2001).

E. Castro y E. Castro (1997), al hablar de pensamiento visual, dicen que es posible educar a los niños y adolescentes para que su capacidad de visualización se desarrolle y citan cómo Zimmermann (1991) considera que se puede adquirir habilidad de visualización. Asimismo y en la misma obra, estos autores señalan como una de las conclusiones de las investigaciones de Kaput, Goldin, Duval, Glaesenfelg y Vergnaud que “el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos”. Así pues, parece lógico pensar que las concepciones gráficas tienen bastante que ver con la visualización y, según Castro et al. (1997) no parece que los estudiantes puedan inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión.

Los investigadores están de acuerdo en que hay que ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que pueda relacionar, de forma eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales que elabora y construye. Como consecuencia, podrá controlar mejor el manejo de las representaciones externas. Sin embargo, hay que poner atención en la Enseñanza de la Estadística, pues la mayor parte de las transposiciones didácticas aritmetizan o algebrizan las situaciones, reduciendo el conocimiento estadístico sólo a técnicas.

En muchos casos se producen fallas cuando se realiza la enseñanza de la estadística y existen evidencias que muestran pocos aciertos e incluso desaciertos en esta actividad. Son varias las causas posibles para esta situación; desde la falta de una didáctica específica, o el hecho de que las relaciones entre las relaciones pictóricas y las estructuras conceptuales, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, son más complejas de lo que aparecen a simple vista. Esta creencia, de que las representaciones icónicas son más naturales, puede inducir a su utilización acrítica para representar estructuras conceptualmente complejas y para las que los estudiantes que no están intelectualmente preparados fracasen en el aprendizaje pretendido. Los procesos de traducción entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto no son una cuestión trivial como se asumía en fechas recientes (Castro E. y Castro E., 1997).

5.10.7 Los gráficos en contextos escolares

Los gráficos están apoyados en conocimientos matemáticos variados, como la proporcionalidad, coordenadas cartesianas, áreas, alturas. Asimismo requieren una diversidad de capacidades: visual-artística, estadística-empírica y matemática. Al analizar las tareas que se requieren en la interpretación de una nube de puntos, la categorización primera de Curcio respecto a la comprensión de los gráficos, "leer los datos" se refiere a cuestiones sobre la lectura de las escalas o encontrar el valor de una de las coordenadas de uno de los puntos, dado el valor de la otra coordenada. La segunda categoría "leer dentro de los datos" se refiere, por ejemplo, a cuestiones sobre la intensidad de la covariación, sobre si la relación podría ser representada o no mediante una función lineal o sobre si la dependencia es directa o inversa. Finalmente la predicción del valor de la coordenada *y*, para un valor de la coordenada *x* requeriría el trabajo en el nivel de "leer más allá de los datos".

Monteiro (2003) señalando a Gal (2002) expresa que los gráficos pueden surgir en dos contextos principales: el de "investigación" y de "la lectura". En el contexto de investigación las personas participan en la investigación empírica de datos reales, y las personas actúan como "productores de datos" o como "analizadores de datos", y por lo general tienen que interpretar sus propios datos y resultados e informar de sus resultados y conclusiones, por ejemplo, a investigadores, estadísticos, estudiantes. En cambio, el contexto de lectura emerge en situaciones cotidianas en las cuales las personas ven e interpretan gráficos, ya sea mirando televisión, leyendo periódicos, analizando sus cartolas de AFP, mirando los anuncios mientras compran, visitando sitios de Internet, entre otros. En estas situaciones de lectura, las personas se encuentran en ambientes cargados de información.

En los medios de comunicación, los gráficos se utilizan para ilustrar los argumentos periodísticos y también para reforzar y/o ocultar aspectos de los datos (Meira, 1997; Ainley, 2000). Sin embargo, el conocimiento específico de gráficos no es el único factor que soporta la interpretación de los gráficos de los medios, incluso los especialistas, que utilizan gráficos diariamente como herramienta profesional, podrían realizar una interpretación relacionada solo con el contenido de gráficos, sin tener en cuenta otros aspectos que influirían en su interpretación (Monteiro y Ainley, 2006).

De acuerdo con Gal (2002), los contextos de lectura de gráficos impresos en los medios exige un cierto nivel de "alfabetización estadística" en la que el lector pueda interpretar, evaluar críticamente, y hacer comentarios sobre la información estadística, los argumentos y mensajes. En la actividad de interpretar gráficos de los medios, los adultos movilizan diversas habilidades y tipos de conocimiento (por ejemplo, habilidades de alfabetización, conocimientos estadísticos y matemáticos, las creencias y el sentido crítico) que pueden generar dificultades y errores.

5.11 La Probabilidad

El éxito de cualquier plan de estudios de probabilidad para desarrollar en los estudiantes el razonamiento probabilístico depende en gran medida de la comprensión de probabilidad de los profesores, así como una comprensión mucho más profunda de los errores que cometen los estudiantes (Stohl, 2005). Hace tiempo se sostiene que el Pensamiento y el Razonamiento Estadísticos deben ser el centro de los cursos de formación de profesores, pero no se ha determinado si los profesores son capaces de pensar y razonar utilizando la información estadística tras la finalización de su curso de formación, o más tarde en sus propias vidas. No se ha demostrado todavía que un conjunto de técnicas de enseñanza o materiales dará lugar a los resultados exitosos de aprendizaje. De hecho, no hay consenso entre los mismos profesores de cómo se debe enseñar un curso de introducción a la estadística; y tampoco se ha determinado las componentes esenciales para que la enseñanza del curso sea exitosa y en qué forma debe aplicarse y/o replicarse. Mickelson y Heaton (2004) citados en Anónimo (2006), aconsejan tener en cuenta el contenido del conocimiento pedagógico necesario para la enseñanza y la manera en que los profesores usan el conocimiento estadístico cuando enseñan estadística.

El fracaso en Probabilidades se ha instituido como natural en nuestras aulas y la enseñanza de las probabilidades y estadística se relega y muchas veces ni siquiera se intenta a pesar de figurar en los programas oficiales (Brousseau, 2009). Existen investigadores preocupados por cuestiones relacionadas a la enseñanza de las probabilidades, y que aparecen sistemáticamente en la literatura, como el problema del carácter poliédrico del concepto de probabilidad, el problema del currículo probabilístico, el problema de las concepciones probabilísticas y el papel de los profesores, el problema de los métodos de enseñanza-aprendizaje y el papel del computador en la enseñanza de las probabilidades (Saénz, 1999).

5.11.1 Errores en Probabilidad de los profesores

En el tema de probabilidad diversas investigaciones señalan que niños, jóvenes y adultos presentan intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad incluso antes de la enseñanza. Algunos investigadores proponen que las soluciones erróneas y la simulación de las experiencias pueden discutirse colectivamente, y mediante esta reflexión y con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras o computadores podrían superarse gradualmente los sesgos probabilísticos, “El uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje de estos conceptos”. (Díaz, 2009).

Existe la llamada "ley de los pequeños números", en la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. En la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982, citados por Díaz, 2007) se enfatiza sólo la representatividad que sirve de base al cálculo de probabilidades de sucesos. Se prescinde del tamaño de la muestra y la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras.

Ortiz et al. (2006) investigan las competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad, y concluyen que los resultados obtenidos son preocupantes, dados la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores en todos los problemas, (también lo reportan Olfos y Estrella, 2010a, en preparación). Además de la falta de razonamiento proporcional en algunos problemas, las respuestas evidencian la asignación de probabilidades subjetivas. Como consecuencia sugieren “el formador de profesores debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento proporcional, al abordar la enseñanza de la probabilidad en las Facultades de Educación”. Si bien en su estudio los profesores hacen uso de estrategias multiplicativas y correspondencias, existe un grupo importante que usa estrategias aditivas, incluyendo un alto porcentaje de futuros profesores de Educación Básica que “No responde” o responde en forma incompleta en todos los problemas de su estudio.

El desarrollo del razonamiento probabilístico en los alumnos depende en gran medida de la comprensión de la probabilidad por parte de los docentes, además de otros aspectos, como las posibles interpretaciones incorrectas de los alumnos, por lo que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables (Stohl, 2005, citado en Ortiz, 2006). Por ello se hace prioritario reforzar la formación probabilidad básica tanto de los futuros profesores de Educación Básica, como tema en los programas de formación continua de estos profesores.

Ortiz et al. (2006) concluyen: “Por un lado, hemos de prepararlos adecuadamente tanto en el conocimiento específico de probabilidad como en el conocimiento pedagógico del mismo, ya que como hemos observado en nuestra investigación, los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores de

Educación primaria en varios problemas son muy similares a los niños de la investigación de Cañizares (1997), siendo por tanto alarmante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar. Para ello, debemos proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la probabilidad, y prepararlos en las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004), mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos. Por otro lado, debemos realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión, proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos (Godino et al., 2008)".

Las concepciones erróneas en probabilidades muestran que hay situaciones donde la intuición no guía la solución formal, incluso el resultado se percibe como paradójico. Como dicen Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991, citados por Ortiz, 2002), las paradojas y las falacias destacan las dificultades de comprensión probabilística porque son señales de un conflicto cognitivo entre un nivel intuitivo y un nivel formalizado de razonamiento. En una paradoja el aspecto objetivo es adecuado aunque intuitivamente inaccesible, mientras en una falacia la componente objetiva es inadecuada aunque intuitivamente atractiva.

Las paradojas y las falacias pueden ser de interés en el aula en cuanto que su estudio y discusión pueden ayudar a: 1) analizar apropiadamente situaciones probabilísticas poco claras o complejas; 2) comprender mejor conceptos básicos en este campo; 3) interpretar formulaciones y resultados con mayor efectividad; 4) educar la intuición y razonamiento probabilístico; 5) ilustrar las dificultades del quehacer científico ante la presencia de situaciones científicas inesperadas y/o anómalas; 6) combatir el "sedentarismo" intelectual mediante la promoción del nomadismo cognitivo, la exploración, que ayudan al avance científico, (Saénz, 1999).

5.12 Propuesta de enseñanza de las representaciones gráficas

Como se señalaba anteriormente, el sentido gráfico o la comprensión de un gráfico consiste en leer y dar sentido a los gráficos habituales de la vida real (periódicos y medios de comunicación), tanto como construir gráficos que mejor comuniquen los datos. Friel, Curcio y Bright (2001) proponen que el sentido gráfico se desarrolla gradualmente a medida que uno crea y utiliza gráficos ya diseñados en una variedad de contextos de resolución de problemas que involucran el uso de los datos. Además, sugieren que es posible ver la representación de los datos desde una perspectiva constructivista, de modo que los profesores podrían dejar que los estudiantes libremente organicen y den sentido a la información antes de introducir el trabajo formal con los tipos tradicionales de gráficos.

Friel y sus colaboradores (2001) sugieren una guía para crear una progresión de desarrollo secuencial de la comprensión gráfica desde los primeros niveles hasta el nivel 8. En los niveles K-2 (kinder a nivel 2): gráficos de objetos, pictografías, gráficos de líneas, gráficos de barras (con el uso de líneas de la cuadrícula para facilitar la lectura, rotulando las barras con números). Niveles 3-5: gráficos de barras (apiladas o barras múltiples), gráficos de tallo, gráficos circulares (énfasis primario de lectura). En los niveles 6-8: gráficos circulares (lectura y construcción), histogramas, diagramas de caja, gráficos de líneas.

Desarrollar los conocimientos de matemáticas debe avanzar en un continuo desde preescolar hasta el nivel 8, así como progresar en la complejidad de los datos. La introducción y uso de la escala debería introducirse alrededor del nivel 3. Los autores afirman que esta progresión no es una regla fija ya que los investigadores han demostrado que los diagramas de tallo y hojas se podrían introducir a los niños pequeños. Los gráficos circulares también pueden introducirse de manera informal antes que los estudiantes sean capaces de llevar a cabo las matemáticas necesarias para construir círculos.

Aunque los profesores podrían no tener experiencias adecuadas de desarrollo profesional en cuanto a interpretar bien los datos presentados en gráficos, o no haber aprendido a cómo desarrollar esas habilidades en los estudiantes, Friel, Curcio y Bright (2001) sostiene que la utilización de preguntas pueden llevar a pensar inferencialmente, y señala otros estudios que también proponen estrategias que organizan el conocimiento del contenido para responder a preguntas específicas, y concluye "… el tipo de preguntas que utilizamos para enseñar a graficar podría desempeñar un papel muy importante en la eficacia de la comprensión gráfica".

El nuevo rol del profesor de matemáticas es exigente en tareas como: la capacidad de dar y evaluar explicaciones, modelar operaciones y conceptos, crear un ambiente para el razonamiento estadístico, escuchar e interpretar las ideas estadísticas de los estudiantes, analizar los errores de los alumnos y evaluar las demandas y las soluciones (a veces rápidamente), evaluar y modificar las transposiciones didácticas los libros de texto, juzgar y elegir representaciones adecuadas, usar notación matemática y estadística, seleccionar y desarrollar definiciones útiles, entre otras.

5.13 Perfil del Profesor que enseña Estadística

La gran mayoría de los profesores ha sido formada en cursos de matemática tradicionales con escasa o nula exposición a los conceptos estadísticos y, en consecuencia, tiene muy poco conocimiento del contenido estadístico y de su enseñanza. Muchos de los profesores con experiencia nunca han estudiado formalmente Estadística, y si bien los profesores más jóvenes pueden haber tomado un curso universitario teórico de introducción a la Estadística, éstos no suelen preparar adecuadamente a los futuros profesores para la tarea de enseñar Estadística, se requiere de cursos en los que se desarrolle la intuición de los estudiantes acerca de los datos y la incertidumbre. Los cursos de estadística de nivel universitario pueden presentar un estilo de conferencia con lo cual no se garantiza una preparación adecuada, y no permitiría a los profesores tener la experiencia de modelar estadísticamente en función de los datos y del contexto, con actividades orientadas al descubrimiento, que idealmente se esperaría que adopten en sus prácticas reales de enseñanza.

Un profesor de matemática que enseña en el ciclo básico debe saber y saber enseñar lo concerniente a la Estadística y la Probabilidad. Proponemos que es altamente deseable que un profesor de matemática:

i. Genere y permita espacios de trabajo en el cual se formulen conclusiones y evalúen nuevas conjeturas e investigaciones. Espacios interdisciplinarios tanto con otros colegas como con los temas de investigación.
ii. Ocupe las diferentes formas de representar datos para comunicar y generar comprensión, su finalidad es desarrollar la transnumeración, la lectura con comprensión de diversos registros, estimulando un espíritu crítico y evaluativo.
iii. Fomente la exploración de muchos aspectos de la probabilidad, potencie la recolección y análisis de datos para la solución de problemas. Explore situaciones en forma activa, experimentando y simulando modelos de probabilidad.
iv. Aplique y construya histogramas, polígonos de frecuencias, funciones de distribución de frecuencias acumulativa, gráficos circulares, diagramas de dispersión, diagramas de tallo y hojas y gráficos de caja y bigotes.
v. Calcule e interprete la media, mediana, moda, media ponderada, media geométrica, media armónica, cuartiles, quintiles, deciles, varianza y desviación estándar.
vi. Distinga una variable dependiente de una independiente, y las representa en un gráfico, así como seleccione la escala más apropiada para lograr la representación que mejor ilustre los datos tanto manual como tecnológicamente.
vii. Entrelace conocimientos matemáticos relacionados con técnicas de conteo o con el uso de los números racionales (fracciones, razones, proporciones, decimales y porcentajes) para estudiar una situación, o utiliza el diagrama de árbol o tablas simples o de contingencia para comparar la probabilidad experimental y teórica de un evento dado.

viii. A través de la experimentación y la simulación, promueva la formulación de hipótesis respecto al centro, variabilidad y distribución de los datos; comprobación de conjeturas y modifica sus supuestos o elecciones a la luz de nueva información.
ix. Desarrolle la habilidad de predecir y encontrar tendencias en representaciones diversas de los datos.
x. Entienda y realice simulaciones o muestreos, ajuste de curvas, compruebe una hipótesis, posibilite aprender a interpretar y a evaluar resultados.
xi. Conozca y reconozca los sesgos y paradojas respecto al azar, y las utilice para mejorar la capacidad de juicio de las afirmaciones estadísticas; así como los errores y dificultades de los alumnos en la comprensión gráfica o el cálculo de algunas medidas estadísticas.
xii. Plantee situaciones de incertidumbre para discutir las posibles soluciones donde no hay certeza.
xiii. Entienda y sea capaz de generar comprensión de los conceptos de eventos dependientes, independientes y mutuamente excluyentes, y su relación con eventos compuestos y probabilidad condicional.
xiv. Conozca el currículo de matemática, en particular la secuencia de contenidos de la componente probabilidad del eje Datos y Azar.
xv. Sepa y adapte conocimientos de la historia de la Estadística y la Probabilidad para destacar el cambio a lo no determinístico que es la esencia de esta disciplina.
xvi. Reconozca las variables discretas y continuas, y las características de diferentes distribuciones como la binomial, geométrica y normal.

Batanero y Contreras (2009) señalan que el cambio metodológico en la enseñanza de la probabilidad y en general de las matemáticas debiese seguir la línea constructivista sobre el aprendizaje y sobre la construcción del conocimiento. Los autores proponen que se puede aplicar al diseño de secuencias de enseñanza el análisis reflexivo sobre la propia práctica docente, con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes, y citan a Ball, Thames y Phelps (2005): “Estas concepciones consideran que, además de la formación científica, el profesor requiere lo que se denomina “conocimiento profesional”, en el cual incluyen cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. Es también importante también buscar actividades adecuadas para llevar a cabo esta formación, En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza”.

5.14 El Ajuste Curricular

Para desarrollar el tema curricular es necesario explicar la articulación de los nuevos ejes en Matemática, y detallar el eje de Datos y Azar del ajuste curricular en Chile para el nivel de Educación Básica, es decir de los niveles 1 al 8. Se especifican los contenidos y las áreas de la Estadística requeridas por los niveles del ciclo básico, mostrando los "pesos" de cada área, Estadística, Inferencia y Probabilidad así como la cantidad de contenidos por nivel. Se finaliza la mirada del nuevo currículo matemático con una breve reseña internacional sobre el currículo de Estadística en otros países.

5.14.1 El ajuste

En el año 2009 aparece un nuevo ajuste curricular en la educación chilena. Algunas razones de ello son principalmente que el marco curricular tenía más de 10 años de vigencia y su implementación había dejado fuera varios aprendizajes. De hecho, en el año 2002 se realizó una actualización en los niveles del primer ciclo básico, NB1 y NB2, y aquel ajuste permitió remirar los otros niveles, detectándose algunas repeticiones temáticas, o temas sólo implícitos, lo que dificultaba la incorporación de los mismos —el caso de la multiplicación y división de enteros en 8° básico—, o diferencias en los ejes curriculares de los distintos niveles, lo que dificultaba la articulación entre primer y segundo ciclo básico, y entre éste y enseñanza media.

Entre los criterios utilizados en la construcción del nuevo ajuste curricular se incluyó la escolaridad obligatoria de 12 años, la organización por ejes curriculares o dominios de aprendizaje, el acercamiento a estándares internacionales, la extensión en el tiempo y continuidad al trabajo con tópicos centrales, y la transversalidad del razonamiento matemático, entre otros.

Los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios del sector de matemática fueron organizados, de acuerdo con una progresión ordenada, en cuatro ejes que articulan la experiencia formativa de alumnas y alumnos a lo largo de los años escolares, estos son:

Números (desde el nivel 1 hasta nivel 11)

Algebra (desde el nivel 5 hasta nivel 12)

Geometría (desde el nivel 1 hasta nivel 12)

Datos y Azar (desde el nivel 1 hasta nivel 12)

Razonamiento Matemático (transversalmente, en todos los niveles).

El ajuste del currículo pretende desarrollar mayores y nuevas capacidades tales como abstracción, pensar en sistemas, experimentar y aprender a aprender, comunicarse y trabajar colaborativamente, resolver problemas, y manejar la incertidumbre y adaptación al cambio. Los nuevos contenidos curriculares presentan una reorientación para la adquisición de competencias nuevas, por ejemplo en matemática de "Algoritmos únicos de cálculo" a "Resolución de problemas y razonamiento matemático".

Si bien algunos currículos internacionales incluían la Estadística en todos sus niveles desde hace mas de 20 años, en Chile existía un cierto aislamiento curricular de la Estadística, el cual ha sido superado con en este ajuste, apareciendo un nuevo eje que reúne la Estadística Descriptiva e Inferencial y la Probabilidad.

5.14.2 Eje Datos y Azar

> "En el eje Datos y Azar se introducen el tratamiento de datos y modelos para el razonamiento en situaciones de incerteza. El tratamiento de datos estadísticos se inicia en el nivel 1, primero básico en el sistema escolar chileno, y el azar a partir del nivel 5, quinto básico. Incluye los conocimientos y capacidades para recolectar, organizar, representar y analizar datos. Provee de modelos para realizar inferencias a partir de información muestral en variados contextos, además del estudio e interpretación de situaciones en las que interviene el azar. Desde la Educación Básica se propone desarrollar habilidades de lectura, análisis crítico e interpretación de información presentada en tablas y gráficos. Por otra parte, se explicita la intención respecto a la habilidad de recolectar, organizar, extraer conclusiones y presentar información. Son también temas de estudio algunos conceptos básicos que permiten analizar y describir procesos aleatorios, así como cuantificar la probabilidad de ocurrencia de eventos equiprobables. En Educación Media, el estudio de Datos y Azar se propone desarrollar conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades que permitan realizar inferencias a partir de información de naturaleza estadística, y distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas". (Ministerio de Educación Actualización Curricular 2009 Matemática, p. 146)

Los conceptos y actividades que son importantes en Datos y Azar son la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones, la probabilidad y la inferencia.

La tabla 12 muestra los Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) del eje Datos y Azar del Sector de Matemática según el currículo chileno. En el Anexo 6 se encuentra la Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios de Estadística para el nivel básico.

Tabla 12: OF y CMO del eje Datos y Azar según nivel escolar de Educación Básica y Media, y las áreas temáticas que cubre, MINEDUC (2009).

	Nivel	OF Y CMO ---- DATOS Y AZAR
ESTADÍSTICA	**1 OF**	7. Clasificar datos cuantitativos y cualitativos usando uno o más atributos, referidos a situaciones y fenómenos presentes en el entorno escolar y familiar, representarlos en tablas y pictogramas simples. 8. Extraer información cuantitativa desde tablas y pictogramas simples, para responder preguntas referidas a temas del entorno escolar y familiar.
	1 CMO	16. Recolección de datos cuantitativos o cualitativos sobre objetos, personas y animales del entorno escolar y familiar; clasificación según uno o más atributos. 17. Representación de datos cuantitativos o cualitativos, en tablas y pictogramas simples, referidos a atributos de objetos, personas y animales del entorno escolar y familiar. 18. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información cuantitativa desde tablas y pictogramas simples construidos con datos provenientes desde el entorno escolar y familiar y comparación de conclusiones a partir de la información extraída desde diferentes tablas.
	2 OF	8. Representar datos cuantitativos, en tablas de doble entrada y pictogramas referidos a situaciones y fenómenos presentes en el entorno escolar y familiar. 9. Extraer información cuantitativa referida a temas del entorno escolar y familiar, desde tablas y pictogramas, comparar y justificar opiniones con base en la información entregada. 10. Reconocer que tablas y gráficos permiten mostrar de manera simple y resumida información referida a diversos temas y situaciones, y ofrecen información que permiten responder diversas preguntas.
	2 CMO	18. Representación de datos cuantitativos o cualitativos, en tablas de doble entrada y pictogramas, recolectados sobre objetos, personas y animales del entorno escolar y familiar, y argumentación sobre la elección de las representaciones. 19. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas de doble entrada y pictogramas, que contienen datos cuantitativos extraídos desde el entorno escolar o familiar, para responder a preguntas planteadas. 20. Discusión sobre la utilidad de las tablas y gráficos para resumir y comunicar información referida a diversos temas y situaciones.
	3 OF	9. Producir y comunicar información cuantitativa del entorno social y cultural, organizarla y representarla en tablas y gráficos de barras simples.10. Resolver problemas que impliquen extraer información cuantitativa y extraer conclusiones, desde tablas y gráficos de barras simples, a partir de datos referidos al entorno social y cultural. 11. Comprender que la información proporcionada por tablas y gráficos permite plantearse nuevas preguntas que no necesariamente tienen respuesta en los datos allí presentados.
	3 CMO	20. Representación de datos cuantitativos en tablas y gráficos de barras simples, recolectados desde el entorno social y cultural, e interpretación en forma verbal o escrita de dicha representación. Discusión sobre el tipo de información que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras simples. 21. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples y formulación de afirmaciones respecto a los datos a los que hacen referencia. 22. Formulación de preguntas y propuestas de respuestas a situaciones de la realidad, mediante la observación de tablas y gráficos de barras simples, construidos con datos recolectados con relación a dichas situaciones.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES	**4 OF**	9. Producir y comunicar información cuantitativa, referida a situaciones o fenómenos en diversos contextos, mediante la recolección de datos, organizarla y representarla en tablas y gráficos de barras simples. 10. Resolver problemas que impliquen comparar información cuantitativa, extraída desde tablas o gráficos de barras simples, en diversos contextos.
	4 CMO	15. Producción y comunicación de información a partir de datos organizados en tablas y gráficos de barras simples, tanto verticales como horizontales. Discusión sobre el tipo de datos que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras simples. 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples verticales y horizontales, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia.
	5 OF	6. Interpretar y comparar información, proveniente de gráficos de línea y de barras múltiples, construir estos tipos de gráficos a partir de información obtenida y usarlos para hacer predicciones en relación con el comportamiento de variables. 7. Describir y argumentar, mediante un lenguaje de uso común, acerca de la probabilidad de ocurrencia de eventos, en situaciones lúdicas y cotidianas.
	5 CMO	17. Interpretación y comparación de información presentada en gráficos de barras múltiples y gráficos de líneas. Discusión sobre el tipo de información que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras múltiples y gráficos de líneas. 18. Construcción de gráficos de barras múltiples y de gráficos de línea, manualmente y mediante herramientas tecnológicas, a partir de datos obtenidos desde diversas fuentes o recolectados a través de experimentos o encuestas. 19. Estudio del comportamiento o tendencia de variables, mediante la lectura de gráficos de línea o barras en diferentes contextos. 20. Empleo de términos de uso corriente, en diversas situaciones lúdicas y cotidianas, relacionadas con el azar, tales como seguro, posible e imposible. 21. Descripción de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas y argumentación acerca de la posibilidad de ocurrencia de estos.
	6 OF	8. Representar datos en gráficos circulares, obtenidos desde diversas fuentes y resolver problemas que impliquen interpretar información presentada en ellos. 9. Comprender los conceptos de población y muestra, y argumentar acerca de la necesidad de tomar muestras en la realización de estudios o encuestas que involucran un gran número de casos. 10. Interpretar y discutir la información que entregan diferentes medidas de tendencia central, determinar su valor cuando sea pertinente al considerar el tipo de datos y emplearlas en diversas situaciones. 11. Estimar la probabilidad de ocurrencia de eventos, mediante la identificación de patrones en el comportamiento de resultados de experimentos aleatorios.
	6 CMO	15. Resolución de problemas que impliquen interpretar información desde gráficos circulares y representación de dichos gráficos en forma manual y mediante el uso de herramientas tecnológicas, a partir de datos obtenidos desde diversas fuentes. Discusión sobre el tipo de información que se puede representar a través de tablas y gráficos circulares. 16. Distinción entre los conceptos de población y muestra e identificación de situaciones donde es necesario tomar muestras. 17. Cálculo de la media aritmética, mediana y moda, en forma manual y usando herramientas tecnológicas para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan y discusión acerca de la pertinencia de su cálculo según el tipo de datos. 18. Repetición de un experimento aleatorio simple en contextos lúdicos y estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento, comprendiendo que a mayor número de lanzamientos mejor es la estimación.
	7 OF	10. Analizar información presente en diversos tipos de tablas y gráficos y seleccionar formas de organización y representación de acuerdo con la información que se quiere analizar. 11. Reconocer que la naturaleza y el método de selección de muestras inciden en el estudio de

P R O B A B I L I D A D E S E I N F E R E N C I A		una población. 12. Predecir acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples.
	7 CMO	17. Análisis de ejemplos de diferentes tipos de tablas y gráficos, argumentando en cada caso acerca de sus ventajas y desventajas en relación con las variables representadas, la relación de dependencia entre estas variables, la información a comunicar y el tipo de datos involucrado. 18. Establecimiento y aplicación de criterios para la selección del tipo de tablas o gráficos a emplear para organizar y comunicar información obtenida desde diversas fuentes, y construcción de dichas representaciones mediante herramientas tecnológicas. 19. Caracterización de la representatividad de una muestra, a partir del tamaño y los criterios en que esta ha sido seleccionada desde una población. Discusión acerca de cómo la forma de escoger una muestra afecta las conclusiones relativas a la población. 20. Discusión acerca de la manera en que la naturaleza de la muestra, el método de selección y el tamaño de ella afectan los datos recolectados y las conclusiones relativas a una población. 21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio simple y contrastación de ellas mediante el cálculo de la frecuencia relativa asociada a dicho evento e interpretación de dicha frecuencia a partir de sus formatos decimal, como fracción y porcentual.
	8 OF	7. Interpretar información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos y utilizar este tipo de representación para organizar datos provenientes de diversas fuentes. 8. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, ampliando al caso de datos agrupados en intervalos. 9. Comprender el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias, y utilizar medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de una muestra de datos y argumentar acerca de la información que estas medidas entregan. 10. Determinar teóricamente probabilidades de ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.
	8 CMO	16. Resolución de problemas en los cuales es necesario interpretar información a partir de tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, tomados de diversas fuentes o recolectados mediante experimentos o encuestas. 17. Construcción de tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, en forma manual y mediante herramientas tecnológicas, a partir de diversos contextos y determinación de la media aritmética y moda en estos casos. 18. Discusión respecto de la importancia de tomar muestras al azar en algunos experimentos aleatorios para inferir sobre las características de poblaciones, ejemplificación de casos. 19. Análisis del comportamiento de una muestra de datos, en diversos contextos, usando medidas de tendencia central y argumentación acerca de la información que ellas entregan. 20. Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios mediante el uso de herramientas tecnológicas. 21. Identificación del conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y de los eventos o sucesos como subconjuntos de aquél, uso del principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos. 22. Asignación en forma teórica de la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio, con un número finito de resultados posibles y equiprobables, usando el modelo de Laplace.
	I OF	8. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos. 9. Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones. 10. Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño

		finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población. 11. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando. 12. Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.
	I CMO	17. Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición. 18. Organización y representación de datos, extraídos desde diversas fuentes, usando histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, construidos manualmente y con herramientas tecnológicas. 19. Análisis de una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones. 20. Uso de técnicas combinatorias para resolver diversos problemas que involucren el cálculo de probabilidades. 21. Utilización y establecimiento de estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo. 22. Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo. 23. Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.
	II OF	9. Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión. 10. Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios. 11. Comprender que la media muestral de pruebas independientes de un experimento aleatorio se aproxima a la media de la población a medida que el número de pruebas crece. 12. Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.
	II CMO	16. Determinación del rango, varianza y desviación estándar, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando, en forma manual y mediante el uso de herramientas tecnológicas. 17. Análisis de las características de dos o más muestras de datos, haciendo uso de indicadores de tendencia central, posición y dispersión. 18. Empleo de elementos básicos del muestreo aleatorio simple, en diversos experimentos, para inferir sobre la media de una población finita a partir de muestras extraídas. 19. Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de esta como una función. 20. Exploración de la Ley de los Grandes Números, a partir de la repetición de experimentos aleatorios, con apoyo de herramientas tecnológicas y su aplicación a la asignación de probabilidades. 21. Resolución de problemas de cálculo de probabilidades aplicando las técnicas del cálculo combinatorio, diagramas de árbol, lenguaje conjuntista, operatoria básica con conjuntos, propiedades de la suma y producto de probabilidades.
	III OF	7. Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios. 8. Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos. 9. Aplicar el concepto de modelo

		probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales. 10. Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.
	III CMO	15. Utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución. 16. Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales. 17. Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta. 18. Determinación de la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones. 19. Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno. 20. Resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades.
	IV OF	6. Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet. 7. Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua. 8. Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales. 9. Comprender que la distribución de medias muestrales de muestras aleatorias de igual tamaño extraídas de una población tiende a una distribución normal a medida que el tamaño de las muestras aumenta. 10. Utilizar modelos probabilísticos para representar y estudiar diversas situaciones y fenómenos en condiciones de incerteza.
	IV CMO	9. Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal. 10. Estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contexto tales como: mediciones de peso y estatura en adolescentes; puntajes de pruebas nacionales e internacionales; datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relación entre la distribución normal y la distribución normal estándar. 11. Realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos donde se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población, mediante el uso de herramientas tecnológicas. 12. Estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado. 13. Análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra. 14. Descripción de los resultados de repeticiones de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas. 15[9]. Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.

Al realizar un análisis de los contenidos mínimos obligatorios del actual ajuste curricular y las demandas cognitivas para el aprendizaje de los contenidos estadísticos dentro del tema de Análisis de Datos y de Probabilidad, pudo construirse

[9] La numeración corresponde a los CMO, correspondientes al eje Datos y Azar, dada en el documento del MINEDUC (2009).

una matriz de los diversos conocimientos involucrados de Estadística, Probabilidades e Inferencia desde nivel escolar 1 hasta el nivel 8, resumidos en la tabla 13.

Tabla 13: Conceptos estadísticos según nivel escolar.

	Nivel	Conceptos
manualmente	1	Datos cuantitativos, datos cualitativos, tablas simples, pictogramas simples
	2	Datos cuantitativos, datos cualitativos, tablas doble entrada, pictogramas
	3	Datos cuantitativos, tablas simples, gráfico barras simple
	4	Datos cuantitativos, tablas simples, gráfico barras simple verticales, gráfico barras simple horizontales
Manualmente y/o computacionalmente	5	Variable, gráfico de línea, gráfico de barras múltiples. Azar, seguro, imposible, posible.
	6	Gráfico circular, población, muestra, media (promedio), mediana, moda. Experimento aleatorio, probabilidad como razón, introducción a la ley de los grandes números
	7	Variables, diversas tablas y gráficos. Tamaño y toma de muestras. Probabilidad como frecuencia relativa (decimal, fracción y porcentual)
	8	Tablas de frecuencia, datos agrupados en intervalo, media y moda en datos agrupados. Medidas de tendencia central muestrales. Equiprobabilidad, espacio muestral, evento o suceso, cardinalidad de espacio muestral, principio multiplicativo, modelo de Laplace.

El presente estudio utilizó esta agrupación para diseñar el instrumento de recogida de información dirigido a profesores de nivel escolar, cuyo objetivo central se plasma en forma integrada en la evaluación del conocimiento estadístico de los profesores sobre los tópicos de Datos y Azar, y exploración de este conocimiento estadístico aplicado a la enseñanza de la estadística y la probabilidad en los niveles 4 y 7. El área de probabilidad presenta un enfoque frecuentista, y se inicia a comienzos del segundo ciclo básico, desde el nivel 5. La estadística inferencial comienza con los conceptos de población y muestra en el nivel 6.

Sólo en el año 2022 saldrá una generación de jóvenes desde las aulas escolares chilenas a las que se les habrá enseñado en forma continua y gradual los tópicos de Datos y Azar.

5.14.3 Distintos pesos dados a las temáticas de Estadística

Tres temáticas principales organizan el eje de Datos y Azar son la Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia. En la tabla 14 se desglosan los conceptos explícitos de los contenidos mínimos obligatorios del ajuste curricular por nivel según áreas señaladas:

Tabla 14: Conceptos del eje Datos y Azar según temáticas y nivel escolar.

Nivel	ESTADÍSTICA Conceptos	Nivel	PROBABILIDAD Conceptos	Nivel	INFERENCIA Conceptos
1	Datos cuantitativos	5	Términos relacionados al azar	6	Población
1	Datos cualitativos	6	Experimento aleatorio	6	Muestra
1	Datos categóricos	6	Probabilidad como razón	7	Tamaño y toma de muestra
1	Tablas simples	6	Ley de los grandes números	8	Aleatoriedad en muestras
2	Tablas dobles	7	Probab como frecuencia relat.		
1	Pictograma	8	Equiprobabilidad		
3	Gráfico barra vertical	8	Espacio muestral		
4	Gráfico barra horizontal	8	Evento o suceso		
5	Variable	8	Cardinalidad de espac. muestral		
5	Gráfico de barra múltiple	8	Principio multiplicativo		
5	Gráfico línea	8	Modelo de Laplace		
6	Grafico circular				
6	Media				
6	Mediana				
6	Moda				
8	Tablas de frecuencia				
8	Datos agrupados intervalos				

Las tres temáticas se superponen y la Estadística Descriptiva forma un continuo, del nivel 1 al nivel 8, en la Educación Estadística plasmada en el actual ajuste curricular del eje de Datos y Azar en el ciclo básico. La figura 25 indica la superposición y el número de conceptos en cada temática.

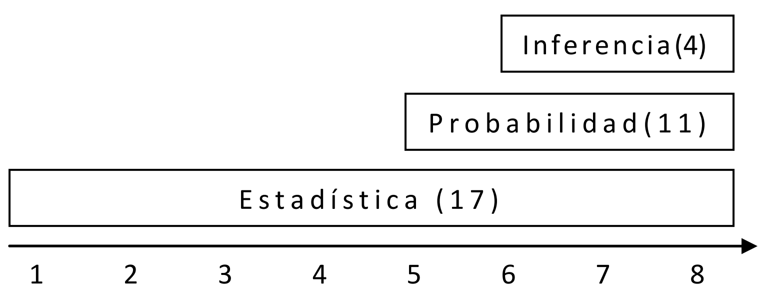


Figura 25: Los temas estadísticos en el continuo de educación básica.

En la figura 26 se observan los diferentes “pesos” dados al eje de Datos y Azar y por lo tanto a sus contenidos en cada nivel. Se detecta poco énfasis de nuevos conceptos de estadística en los niveles 2, 3 y 4, pese a que en esos niveles se incluye sólo la temática de estadística, al parecer implícitamente se realiza una profundización de los conceptos del nivel 1 integrando pausadamente los nuevos conceptos en el primer ciclo de educación básica. La misma situación sucede con el nivel 7.

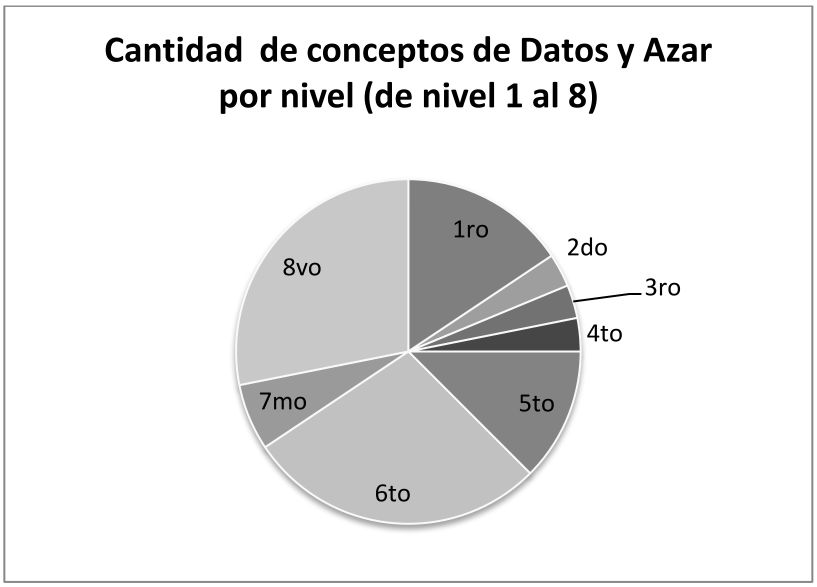


Figura 26: Cantidad de conceptos de Datos y Azar desde nivel 1 (primero básico) a nivel 8 (octavo básico).

Es necesario observar que, en el programa de estudio de matemática con el ajuste curricular para educación básica; hay ausencia de una de las grandes ideas estadísticas, la variabilidad. En el ciclo básico no se encuentra explicitada la intención de desarrollar el concepto de variación, sólo en el nivel 10, II E.M., de educación media en Chile, se menciona el rango.

5.14.4 Currículos Internacionales

En el reporte sobre la Enseñanza de la Matemática en el siglo 21 (MT21, 2007), que estudia la preparación de los profesores de matemáticas del segundo ciclo básico en seis países, se concluye que es muy revelador que los países Taiwán y Corea, cuyos estudiantes del segundo ciclo continuamente tienen un buen desempeño en pruebas comparativas internacionales (TIMSS y PISA) tienen un currículo coherente, pertinente y riguroso, y que los profesores que han sido entrenados con amplias oportunidades educacionales en matemáticas como en los aspectos prácticos de la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de segundo ciclo básico.

Conforme a los desafíos del mundo actual en que a diario se toman decisiones en medio de la incertidumbre, el gobierno de Chile propuso este nuevo ajuste en el currículo, en el cual se incorpora el eje Datos y Azar desde primer año de educación básica a cuarto año de enseñanza media, introduciendo la componente de Probabilidades en forma continua desde el segundo ciclo básico, de quinto básico a octavo. Cabe hacer notar que el cambio curricular coincide con la tendencia de las reformulaciones en los currículos internacionales, en los cuales se introduce el razonamiento probabilístico desde la educación básica y la Estadística como un continuo en la escolarización.

Nueva Zelanda es reconocida como líder mundial en materia de inclusión de Estadística en el currículo escolar, especialmente con respecto a los programas de educación primaria. La Estadística se ha incluido como parte del currículo de matemática de la escuela primaria desde 1969 en algunos niveles, y desde 1992 en el currículo de matemáticas en todos los niveles escolares, a partir del año 1 al año 13. Al contrario de otros países, como Australia y EE.UU., que incluyeron normalmente los programas de Estadística sólo desde principios de los años noventa (Watson, 2006 citado por Burgess, 2007); incluso entonces, los planes de estudios no fueron necesariamente mandato a nivel nacional como es el caso de Nueva Zelanda.

El más reciente plan de estudios de Matemáticas y Estadística de Nueva Zelanda se publicó en 2006, e incluye tres capítulos: Números y Álgebra, Medida y Geometría, y Estadística. Es importante destacar que en consonancia con las recomendaciones de las investigaciones del área, el eje de Estadística incluye un fuerte énfasis en las investigaciones estadísticas (pensamiento), al requerir a los estudiantes en todos los niveles a participar en la conducción de investigaciones. La referencia explícita al pensamiento estadístico proporciona reconocimiento implícito de la importancia de la investigación contemporánea desde el campo de la Educación Estadística (Burgess, 2007).

En Italia, la Estocástica (Probabilidad y Estadística) ha sido incluida desde 1979 en el currículo de matemáticas de escuelas secundarias, y desde 1985 en el de las escuelas primarias (Ottaviani, 1995).

En España, desde el año 2006 se inserta la estadística desde el primer ciclo de enseñanza (niños de 6 y 7 años), en el nuevo Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España, conocido como MEC.

En general, a nivel internacional el área de Estadística a nivel escolar se enmarca en la representación categórica de datos (gráficos de barras, circular, pictogramas y tablas), la representación bivariada de datos (gráficos de dispersión y lineal), las formas de distribución (formas de distribución de datos, simetría, valores atípicos), y las medidas de centralización (media, mediana y moda), Sorto (2004).

CAPITULO 6

ESTUDIO EXPERIMENTAL

6.1 Introducción

Este capítulo presenta el objetivo de la tesis desde la perspectiva de validación, se especifica el marco teórico, y el diseño metodológico, incluyendo los pasos del plan de trabajo.

Se detalla un análisis a priori de cada ítem del instrumento, los resultados de las propuestas de los jueces, la aplicación del coeficiente de validación de contenido de Aiken, finalizando con la validez de contenido del juicio de expertos y que determina el instrumento final.

6.2 Propósito del Estudio Experimental

El propósito del estudio es disponer de un instrumento que tenga validez de contenido y que pretenda evaluar el conocimiento pedagógico del contenido de Estadística. El instrumento consiste en establecer hasta qué punto los profesores a los que se les presentan problemas y situaciones pueden activar eficientemente sus conocimientos matemáticos-estadísticos y sus competencias desde su rol de enseñante.

El estudio se enfrenta a un problema operativo que consiste en evaluar si los profesores que hacen matemática en educación básica, (1) tienen los conocimientos estadísticos requeridos por el currículo y (2) han desarrollado su capacidad de enseñar en forma eficaz la Estadística.

Se reconoce la dificultad de llevar esto a cabo mediante una prueba escrita de evaluación, ya que el proceso de enseñanza es de suyo complejo y requiere considerable tiempo. Este estudio ha optado por preparar un conjunto de ítems que evalúen diferentes partes de este proceso. Cada uno de estos ítems, o grupo de ellos, propone una tarea vinculada a un contexto y que puede tratarse como un problema estadístico y/o de su enseñanza.

La elección y construcción de los ítems realizó una conjunción de tres planos, el didáctico, el cognitivo y el epistemológico, este último vinculado en los capítulos de construcción de los objetos estadísticos y el de representaciones. El plano epistemológico considera la extensa aplicación calculista de la Estadística, la tardía aparición y desarrollo histórico de la teoría, la dificultad de los problemas ligados al surgimiento y desarrollo de la teoría probabilística, y los procesos de transposición didáctica más comunes que llevan a la Estadística a un nivel de enseñanza relativamente elemental y determinístico. El plano cognitivo toma en cuenta Ia exigencia de movilidad permanente entre los registros que se articulan, y el nivel de manejo casi simultáneo entre contexto y modelo. El plano didáctico considera los resultados en el énfasis de Ia enseñanza basada en técnicas, el status ingenuo e inframatemático del registro gráfico en Ia enseñanza, y la distancia entre la comprensión de los conceptos enseñados y lo realmente aprendido.

6.3 Objeto Matemático

El objeto matemático de este estudio es amplio y determinado mayoritariamente por el currículo; a través del término "Estadística" se incluyen la Estadística Descriptiva, la Estadística Inferencial y la Probabilidad a nivel escolar del nuevo currículo chileno.

> Los objetos matemáticos de la Estadística Descriptiva tratados son: datos cuantitativos, cualitativos, categóricos, y agrupados en intervalos; tablas simples, dobles y de frecuencia; gráficos de pictograma, de barras (vertical, horizontal y múltiple), de línea y circular; las medidas de tendencia central (media, mediana y moda), y variación (rango y noción de variabilidad).
>
> Los objetos matemáticos de la Estadística Inferencial tratados son: población, muestra (tamaño, toma, aleatoriedad y comportamiento).
>
> Los objetos matemáticos de Probabilidad tratados son: azar, experimento aleatorio, probabilidad como razón y como frecuencia relativa, equiprobabilidad, espacio muestral, evento, principio multiplicativo, ley de los grandes números y modelo de Laplace.

6.4 Marco Teórico del Estudio

Las nociones teóricas que utilizaremos para interpretar los resultados de la presente investigación corresponden al constructo del CPC de Shulman (1987) especificado para el área matemática por Ball (2000), y descrito en detalle en el Capítulo 4. La descripción del problema, la construcción y el análisis del instrumento que busca perfilar el CPC del profesor que enseña Estadística en segundo ciclo, han adoptado los principios de la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica.

Para este estudio la configuración de las componentes del marco teórico se declara en los siguientes términos; el conocimiento del contenido (CC), en cuanto al conocimiento general y conocimiento específico de la estadística; el conocimiento pedagógico del contenido (CPC), en cuanto a la enseñanza (como transposición didáctica, es decir, adaptación al nivel escolar) distinguiéndose el conocimiento del currículo, la organización de las tareas estadísticas escolares, las concepciones del profesor sobre la estadística y sobre el aprendizaje, y el diseño de escenarios para el aprendizaje; el conocimiento del profesor en relación al saber del alumno, categorizado en las conceptualizaciones de los alumnos, sus dificultades más frecuentes, sus errores posibles, y sus estrategias usuales; finalmente, los medios didácticos del profesor, considerados en cuanto a representaciones concretizadoras.

La figura 27 resume las configuraciones del constructo teórico:

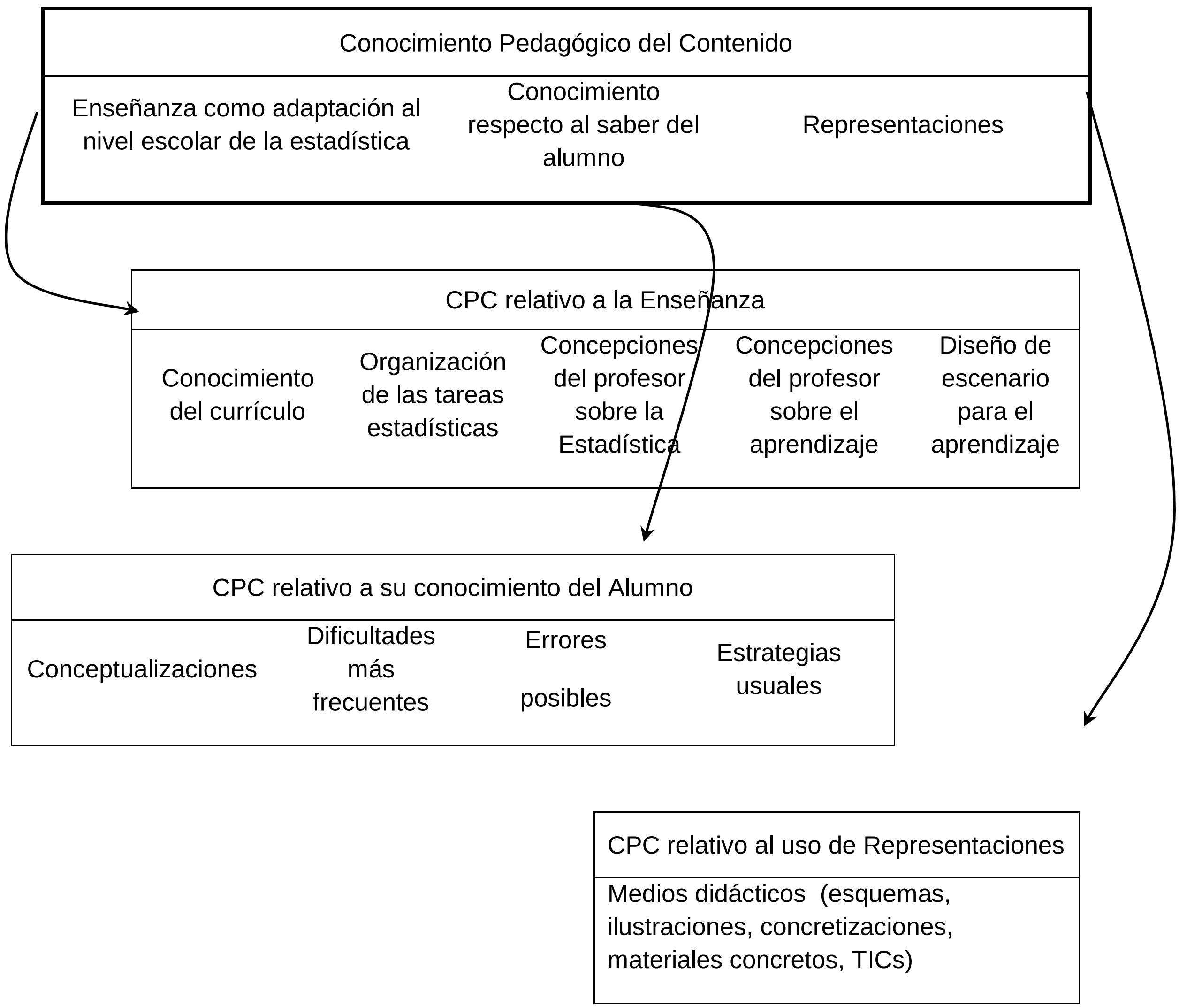


Figura 27: Conceptualización del constructo teórico.

La propuesta de conceptualización de la dimensión CC posee dos componentes, el conocimiento general y cultural de la estadística, y el conocimiento específico de la estadística, cuyo conocimiento es profundo pero referido a la estadística escolar.

Como elemento esencial y previo a su tarea de enseñar, el profesor deber tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar, en nuestro caso queda enmarcado con los contenidos mínimos obligatorios que solicita el currículo chileno. Varios autores coinciden que el conocimiento de la materia es una condición necesaria aunque no suficiente para la enseñanza y el aprendizaje del contenido.

Según hemos descrito antes, la dimensión del CPC comprende la interacción de tres componentes: el conocimiento de la enseñanza en cuanto a la adaptación que hace el profesor del saber al nivel escolar, el conocimiento del profesor en relación al saber del alumno, y el conocimiento del profesor en el uso de medios didácticos.

El conocimiento de la enseñanza incluye: el conocimiento del profesor sobre el currículo (sus contenidos y objetivos por nivel); la organización de las tareas matemáticas escolares (secuencias), las concepciones del profesor sobre la matemática y las concepciones del profesor sobre las teorías de aprendizaje en cuanto guían su toma de decisiones en sus planificaciones y en su accionar en el aula; y el diseño de escenarios dependiente de la situación (todo aquello que potencie la conexión entre ideas, como las contextualizaciones, analogías, ejemplos y contraejemplos, ideas unificadoras, entre otros).

En el conocimiento de la relación de los alumnos con el contenido, CRAC, subyacen las conceptualizaciones adquiridas de los alumnos, sus dificultades frecuentes, los posibles errores de los alumnos, y sus estrategias más usuales.

El conocimiento de los medios didácticos, MEDI, involucra la concretización que hace el profesor en cuanto al medio con el contenido, ello incluye el uso de esquemas, ilustraciones, dibujos, materiales concretos (reloj, termómetro, balanza, pizarra, lápices de colores, etc.), TIC, calculadora, entre otros.

Específicamente el marco considera las **dimensiones** como los elementos que pueden integrar a cada categoría de los componentes del CPC, Enseñanza, CRAC y Medios. Y los **indicadores** tales como las características distintivas del fenómeno objeto de estudio (CPC), las que se segmentan y codifican en un plano global y específico del CPC; y a partir de las cuales se obtienen los datos y fenómenos en forma de ideas y conceptos definidos como necesarios para el estudio del CPC.

6.4.1 Enseñanza

La dimensión de Enseñanza incluye características distinguibles como el estudio de las creencias, concepciones de y sobre la matemática y el estudio sobre los diferentes conceptos matemáticos, es decir, las formas en que los profesores comprenden un determinado contenido matemático, lo que involucra también la exploración sobre cómo se origina y obtiene dicho conocimiento en el sujeto, en qué se basa y cómo se comprende la estructura (definida por el saber sabio) de la materia a enseñar, cómo se aprende y cómo se transforma el contenido matemático a contenido matemático enseñable (transposición didáctica).

En este estudio nos abocamos a dos tipos de concepciones: (1) la del profesor sobre la matemática, en este caso la estadística; y (2) la del profesor sobre el aprendizaje.

Hemos definido las concepciones citadas como una integración de los conceptos de creencia y de concepciones. Asumimos, las concepciones como una creencia consciente, referido a una creencia de orden superior y basada sobre procesos de razonamiento semejante los cuales están por lo menos justificados y aceptados por el propio individuo (Pehkonen (2001) y Saari (1983), citados por Pinto (2010)).

6.4.1.1 Concepciones del profesor sobre la Estadística. Gordon (1998, citado por Pinto, 2010) identificó cinco categorías sobre las concepciones de la Estadística por parte del profesor: sin significado; proceso o algoritmo; dominio de conceptos estadísticos y métodos; una herramienta para obtener resultados en la vida real; y una forma de pensamiento crítico.

De modo similar, Reid y Petocz (2002) y Petocz y Reid (2002) citados por Pinto (2010), clasificaron las concepciones de la Estadística según focos de atención en función del énfasis otorgado a la Estadística, y que serán adoptados por este estudio: técnica, uso de datos, significado.

Una concepción enfocada en la **Técnica**, basada en los autores citados, involucra (1) la *Estadística como una actividad numérica individual*, la concepción sobre la Estadística es limitada y fragmentada, ven a la Estadística como un tipo de matemáticas el cual supone el uso de “operaciones y/o cálculos”, “números”, o “probabilidad”; (2) la *Estadística como el uso específico de técnicas estadísticas*, ven a la Estadística como técnicas individuales que pueden ser usadas para mirar los datos, graficar, recolectar datos, realizar una regresión, u obtener una medida estadística; (3) la *Estadística como una colección de técnicas estadísticas*, los sujetos describen la Estadística como una colección o conjunto de diferentes técnicas que pueden ser usadas con los datos, tienen consciencia de un rango de técnicas, y describen la Estadística a través de una lista de éstas técnicas.

Una concepción enfocada en el **Uso de datos**, comprende una (4) *Estadística como análisis e interpretación de datos*, describen la Estadística como comprender, interpretar y darle sentido a los datos, exploran las diferencias entre relaciones encontradas en los datos y usan esas relaciones para esbozar conclusiones acerca de los datos. Y describen la Estadística usando las tres concepciones anteriores. (5) La *Estadística como una forma de comprender la vida real usando diferentes modelos estadísticos*, expresan que la Estadística es una forma de comprender las situaciones de la vida real usando una variedad de modelos estadísticos, lo que incluye la interpretación de un conjunto de datos y obtener información de éstos, además de utilizar una variedad de modelos para comparar sus datos con la realidad y probar la pertinencia de sus conclusiones.

Una concepción enfocada en el **Significado**, utiliza la (6) *Estadística como una herramienta global usada para dar sentido al mundo y desarrollar significados personales*, los sujetos se centran sobre la comprensión y el dar sentido a la realidad usando métodos. Más allá, los sujetos usan métodos estadísticos para desarrollar su propio pensamiento, para crear nuevas interpretaciones de datos y de la vida; activamente amplían aspectos de la realidad para su propio pensamiento creativo y crítico.

6.4.1.2 Concepciones del profesor sobre el Aprendizaje. Una interesante enumeración de las concepciones sobre el aprendizaje de la Estadística realizada por Pinto (2010): Hacer, Recolectar, Aplicar, Relacionar, Expandir, y Cambiar. Cuyas especificaciones sobre el aprendizaje de la Estadística son:

Hacer: es hacer actividades requeridas para aprobar o hacer bien las evaluaciones o exámenes.

Recolectar: es recolectar información y métodos para después usarlos. Conjunto de técnicas que necesitan ser adquiridas para luego ser usadas “después”.

Aplicar: es la aplicación de métodos para comprender estadísticas. Hacer actividades prácticas (ejemplos, revisar resultados y obtener respuestas correctas) que provean la capacidad de comprender la asignatura de la Estadística.

Relacionar: es relacionar la teoría y la práctica para comprender la Estadística. Los estudiantes intentan encontrar cómo la práctica de los ejercicios puede informar sobre la forma de comprensión de la teoría estadística y viceversa. Los estudiantes describen una intención para usar la estadística en las situaciones de la vida real y disfrutan tratando con datos reales.

Expandir: es utilizar los conceptos estadísticos para comprender áreas más allá de la Estadística. El propósito es comprender lo que los estudiantes hacen, el significado de los datos resumidos y el significado de lo que hacen con los números en el mundo real. Ven cómo la Estadística puede ser utilizada fuera de la asignatura o en un contexto fuera del aula.

Cambiar: es acerca del uso de conceptos estadísticos para cambiar su visión. Los estudiantes se centran en la calidad del cambio de sus propias comprensiones de la idea más amplia de la Estadística y del mundo. Ven a la Estadística como una herramienta intelectual que puede ser usada para informar sus conocimientos o resolver problemas en otras áreas.

Desde otra perspectiva sobre las concepciones de los profesores de las teorías de aprendizaje, este estudio postula cuatro categorías resumidas: Conductista, Cognitivista, Significativista, y la Sociocontructivista. Al vincular a cada una de ellas con una metáfora de aprendizaje, se obtiene la siguiente subcategorización:

Conductista: Exponer (memorizar fórmulas de cálculo, repetir, exponer el saber, resolver bien),

Cognitivista: Organizar (organizar redes de conceptos, desafíos),

Significativista: Útil (relación con saberes previos y funcionales), y

Socialconstructivista: Participar (participar en solución de problemas en la comunidad a través de la modelación, predicción, etc., trabajar y argumentar en grupos).

6.4.1.3 Conocimiento del currículo

Este indicador reconoce el conocimiento del currículo como herramienta al servicio de la tarea de enseñar del profesor, con especial dominio de los materiales y los programas diseñados para la enseñanza de materias particulares a un nivel determinado, la variedad de materiales instruccionales disponibles en relación a esos programas, y el conjunto de orientaciones que sirven como indicaciones y/o contraindicaciones para el uso del currículo o del programa de estudios. Establecimos los siguientes tipos de evidencia de conocimiento del currículo,

Conocimiento A: de los contenidos del eje de Datos y Azar del nivel que enseña según Programa de Estudio.

Conocimiento B: de los contenidos del eje de datos y Azar del nivel anterior y posterior del que enseña según Programa de Estudio.

Conocimiento C: de las orientaciones y recomendaciones didácticas, indicadores de aprendizajes, experiencia de aprendizajes del eje Datos y Azar.

Conocimiento D: de instrumentos curriculares (los mapas de progreso – en Anexo 5, niveles de logros del SIMCE, planes de estudio)

6.4.1.4 Organización de las Tareas Matemáticas Escolares

Respecto a la organización de las tareas matemáticas-estadísticas escolares, identificamos cuatro tipos de secuencias,

Secuencia A: Organiza de acuerdo al conocimiento estadístico

Secuencia B: Organiza de acuerdo al nivel de dificultad

Secuencia C: Organiza de acuerdo a una secuencia planificada de enseñanza

Secuencia D: Organiza de acuerdo al programa de estudio (currículo)

6.4.1.5 Diseño de escenario

El diseño de escenario considera cómo se construye un escenario para aprender, si destaca el contexto sobre el uso enfatizado de analogías, o principalmente ocupa ejemplos y contraejemplos para mostrar, o crea conflictos cognitivos o integra otras disciplinas.

6.4.2 Conocimiento del Profesor en Relación al Saber del Alumno, CRAC.

La dimensión CRAC incluye características distinguibles del conocimiento del profesor en cuanto a los errores, dificultades, conocimientos adquiridos y estrategias respecto al saber de los alumnos. Es la habilidad del profesor para movilizar sus conocimientos de manera apropiada:

(a) frente a una situación compleja en que alumnos expresan sus errores y/o dificultades, y que exigen del profesor una acción rápida;

(b) frente al planeamiento, conducción y evaluación en la cual el profesor acude a sus conocimientos sobre los conocimientos adquiridos y las estrategias usuales de los alumnos del nivel.

6.4.2.1 Conocimiento de errores de los alumnos

Es el indicador del trabajo o conocimiento con los posibles errores de los alumnos, con una actitud anticipada a los mismos. Entendiendo por error a proporcionar una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea. Sus clasificaciones distintivas son:

- Conocimiento de errores conceptuales típicos de los estudiantes
- Conocimiento de errores de notación y de lenguaje matemático
- Conocimiento de los temas que son fuente de error para los estudiantes
- Conocimiento expresado en la explicación rápida al error común
- Conocimiento expresado en la explicación correcta al error común
- Conocimiento del error como fuente de aprendizaje grupal
- Conocimiento de un *obstáculo*[10] en el alumno

6.4.2.2 Conocimiento de las dificultades de los alumnos

Es el indicador de la comprensión del profesor respecto a las dificultades más frecuentes de los alumnos. La dificultad relacionada con aquello que impide conseguir, ejecutar o comprender el concepto o tópico estadístico. Es de menor "peso" que el error.

- Conocimiento de las dificultades en las operaciones, algoritmos
- Conocimiento de cuándo una producción del alumno muestra más o menos comprensión
- Conocimiento de los temas que son más difíciles que otros

6.4.2.3 Conocimientos adquiridos por los alumnos

Este indicador está relacionado con el conocimiento del profesor de las conceptualizaciones del alumno, sobre los conocimientos previos adquiridos para enfrentar con éxito una tarea.

- Conocimiento adquirido más importante para enfrentar una tarea
- Conocimiento adquirido por la mayoría al haber enfrentado una tarea
- Conocimientos adquiridos puestos en juego al enfrentar una tarea
-

[10] Obstáculo en el sentido de Bachelard.

6.4.2.4 Estrategias usadas por los alumnos

Es el indicador del conocimiento del profesor sobre las estrategias utilizadas por sus alumnos al resolver una tarea, distinguimos tres estrategias:

- Estrategias ingenuas
- Estrategias memorización
- Estrategias de visualización
- Estrategias de metacognición

6.4.3 Medios Didácticos

Esta dimensión reúne todas las representaciones concretizadoras utilizadas por el profesor para ayudar a generar del conocimiento por parte de los alumnos y construir y establecer relaciones.

Indicadores de ésta son el uso de material concreto, utilización de tecnologías de la información, la presentación a través esquemas, ilustraciones, o el uso de modelos concretos (como tablero de Galton), entre otros.

6.5 Diseño Metodológico

El propósito del estudio es la creación y validación de contenido de un instrumento que recogerá datos empíricos para tratar de describir las variables involucradas en la enseñanza de la Estadística por parte de los profesores que hacen clases en educación básica. La construcción se realiza bajo el constructo teórico del CPC, los contenidos propuestos desde el currículo chileno y los antecedentes revisados. Un panel de jueces otorgará la validez de contenido, y el coeficiente V de Aiken determinará los ítems que conformarán el instrumento final.

Para determinar qué conocimientos de base son requeridos para que el profesor de enseñanza básica pueda efectivamente llevar al aula el ajuste curricular del eje Datos y Azar, se realizará una revisión de literatura y recopilación de antecedentes respecto al estado de la investigación sobre educación estocástica, sobre las representaciones y sobre los antecedentes epistemológicos. Asimismo, se revisará literatura sobre el conocimiento del contenido del profesor, el conocimiento pedagógico del contenido, el conocimiento del contenido estadístico para la enseñanza, CEE, el conocimiento de las representaciones concretizadoras, CR; y el conocimiento de la relación de los alumnos con el contenido, CRAC; tratando de establecer una integración entre los CPC, CC, CEE, CR, CRAC y los conocimientos procedurales y conceptuales explicitados en el currículo.

Si bien el presente instrumento evaluativo está dirigido a los profesores de educación básica que enseñan matemáticas en la Quinta Región en las comunas de Viña del Mar, Valparaíso y Quilpué, pertenecientes a escuelas de dependencias municipalizadas, particular subvencionadas y particulares, el instrumento que evalúa el contenido estadístico para la enseñanza considera como los sujetos del estudio a los jueces que cumplen el papel de expertos.

6.5.1 Validez del Estudio

Validez se refiere al grado en que la teoría y la evidencia empírica apoyan las interpretaciones de los puntajes que se obtienen en una prueba en función de los propósitos de la misma (AERA, APA, & NCME, 1999). Establecer la validez de un instrumento involucra tener (a) propósitos claramente definidos, (b) actividades o tareas apropiadas a esos propósitos, (c) recolección de muestras del desempeño, (d) control de las fuentes de sesgo, (e) credibilidad y (f) utilidad (Stiggins, 2001, citado por Montecino, 2008).

El proceso de validación en este estudio se realizará principalmente a través de la validez de contenido, mediante las opiniones de un panel de jueces respecto al constructo teórico de Shulman.

El proceso de validación de contenido implica la definición de indicadores y sus respectivos ítems representativos, la identificación de jueces competentes en el área que el test pretende medir; y el juicio por parte de este panel respecto a la representatividad de cada ítem empleado para medir el constructo teórico que sustenta el instrumento construido, es decir, la opinión de expertos sobre la validez del material evaluativo.

El panel de expertos requerido para contrastar la validez de contenido de los ítems incluirá profesores expertos en el dominio que miden los ítems, en investigación y teoría sobre Didáctica de las Matemáticas (académicos que han estudiado en sus tesis o estudios de doctorado el CPC de Shulman, o magister en Didáctica o especialistas en Educación Matemática o Estadísticos) y profesionales con una experiencia práctica y/o aplicada (profesores de aula del ciclo básico y/o profesores desarrolladores de libros escolares). De esta manera se intenta ampliar el rango de las posibles interpretaciones de los ítems y de la información que arroja el instrumento de medición.

Al panel de jueces se les proveerá del instrumento, las indicaciones y la matriz (11x20) con los aspectos del constructo teórico a evaluar, y un texto de libre lectura con el resumen del constructo teórico adoptado.

En la literatura metodológica se han descrito algunos enfoques de análisis cuantitativos para la validez de contenido, ya se mencionó un método sencillo, el cálculo del coeficiente V de Aiken. Este coeficiente es una de las técnicas para cuantificar de validez de contenido o relevancia del ítem respecto a un dominio de contenido en N jueces, puede obtener valores entre 0 y 1; y a medida que sea más elevado, el ítem tendrá mayor validez de contenido, el valor 1 es la mayor magnitud posible que indica un perfecto acuerdo entre los jueces respecto a la mayor puntuación de validez de los contenidos evaluados. La interpretación del coeficiente usa la magnitud hallada y la determinación de la significancia estadística mediante las tablas de valores críticos que se pueden hallar en Aiken (1985).

Con la tabla de especificaciones del instrumento se realizará una validación pues se enumeran todas las áreas de contenido que se consideren importantes o imprescindibles, pues las incluye el currículo, y esta tabla asegurará que el instrumento contenga los ítems referentes a cada una de ellas en una proporción adecuada.

La validez aparente, definida como la necesidad de que el test dé la impresión de que efectivamente es adecuado a los sujetos que se les aplica, y que tiene sentido para medir lo que se pretende, se manifiesta con los comentarios de los jueces respecto a la idoneidad general y con la modificación y culturización realizada al contexto de algunos ítems.

La traducción de los ítems de inglés al español se realizó a través de la técnica del decentering. Este es un concepto de traducción propuesto por Werner y Campbell (1970, citado por Barahona, 2004) y se refiere al proceso por el cual un conjunto de materiales es traducido de manera fluida, de modo que resulte natural en la versión del segundo lenguaje.

6.5.2 Instrumento

El instrumento a construir trabaja bajo la categorización adoptada por el grupo de investigación de FONIDE F410980[11], y fue analizada en conjunto por el grupo conformado por los investigadores principales y la autora de este estudio.

El instrumento consiste en un cuestionario de ítems de CC y CPC (Ball, 2007; Shulman, 1986, 1987), cuyos contenidos están en el actual currículo de matemática de Chile (MINEDUC, 2009).

6.5.3 Operacionalización del Marco Teórico de este Estudio

[11] Proyecto FONIDE N° F410980-200, "Conocimiento Pedagógico Del Contenido y su Incidencia en la Enseñanza de la Matemática, Nivel de Educación Básica", investigadores: Olfos, Guzmán y Galbiati.

La operacionalización queda descrita según:

CC (Conocimiento del Contenido)

EST Conocimiento General y Conocimiento Específico de la Estadística

CPC (Conocimiento Pedagógico del Contenido)

ENSEÑANZA adaptación del saber al nivel escolar de la matemática

CURR Conocimiento del Currículo
OTME Organización de las tareas matemáticas estadísticas escolares
CRE-M Concepciones del profesor sobre la Estadística
CRE-A Concepciones del profesor del aprendizaje (Teorías)
DIES Diseño de escenario para aprendizaje (contextualizaciones, analogías, ejemplos y contraejemplos)

CRAC conocimiento del Profesor en Relación al Saber del Alumno

ADQU Conceptualizaciones de los alumnos (sus conocimientos Adquiridos)
DIFI Dificultades más frecuentes de los alumnos
ERRO Errores posibles de los alumnos
ESTG Estrategias usuales de los alumnos

MEDIOS DIDÁCTICOS Representaciones concretizadoras

MEDI Medios didácticos (esquemas, ilustraciones, concretizaciones, materiales concretos, TIC)

6.5.4 Etapas y Procedimientos

Los procedimientos se presentan según las diferentes seis etapas del estudio.

Primera Etapa: Especificación de los contenidos

Para delimitar los contenidos a evaluar que serán enseñados por el profesor dado el actual marco curricular de enseñanza básica, se realizará la lectura del ajuste curricular chileno (MINEDUC, 2009) y propuesta de estándares para Datos y Azar (material de uso restringido). Comienzo de generación de un banco de ítems desde los registros de cuadernos de alumnos de los niveles 4 y 7, desde los textos escolares de matemática chilenos (2009 y 2010), y desde la literatura especializada en español y/o inglés.

Segunda Etapa: Revisión y redacción de ítems de CC

La recopilación de ítems de Estadística en las pruebas internacionales de matemáticas para los niveles que se estudian, implicará la elección y modificación del lenguaje y contexto de los ítems propuestos en dichas pruebas. Esta recopilación conlleva un análisis sistemático del área de Estadística que se evaluará, para asegurarse que todos los aspectos principales estén adecuadamente cubiertos y en las proporciones correctas según los CMO del currículo. Construcción de un primer banco de ítems de CC se construye para presentarse a alumnos y profesores.

Tercera Etapa: Construcción y redacción de ítems de CPC

La categorización de las dimensiones e indicadores del CPC, en especial de Enseñanza, CRAC y Representaciones permitirá la redacción de ítems que evalúen el conocimiento estadístico para la enseñanza, en palabras de Shulman, del CPC, conocimiento pedagógico del contenido. Creación de un banco de ítems que integra el CC y CPC de Estadística.

Cuarta Etapa: Aplicación piloto del instrumento

Aplicaciones pilotos a alumnos, profesores y entrevista a profesor permitirá afinar las redacciones del instrumento CPC-DA, conocimiento pedagógico del contenido del eje Datos y Azar, evaluar los contextos apropiados a la realidad chilena, los tiempos, las indicaciones, los distractores, los enunciado, los ítems abiertos, entre otros. Así como las características sicométricas del instrumento, ítems más fáciles y más difíciles. Estas pruebas pilotos permitirán nuevamente perfeccionar el instrumento que se construye, y darán validez aparente al instrumento.

Quinta Etapa: Validación del instrumento CPC-DA

El análisis a priori del instrumento dará evidencia de validez interna, y la revisión de este análisis a priori de cada ítem del CPC-DA por un experto estadístico da garantía del contenido estadístico que evalúa el instrumento.

El instrumento CPC-DA integra ítems de CC y CPC y será presentado a un panel de expertos de nivel internacional, de al menos el 50% de ellos, para la validez de contenido. A cada uno de los jueces se le proveerá vía correo electrónico y previo acuerdo con cada uno de ellos, del instrumento a evaluar, las indicaciones y la matriz con las dimensiones del constructo teórico a evaluar, y un texto de libre lectura que resume el constructo de Shulman.

El grado de acuerdo de los jueces permitirá eliminar y/o modificar ítems para construir el instrumento CPC-DA final.

Sexta Etapa: Instrumento CPC-DA

El instrumento CPC-DA será construido para ser contestado en línea, con un tiempo delimitado. Los ítems se presentarán en pantalla en forma lineal (los sujetos no podrán volver a leer o contestar nuevamente el ítem), los ítems prioritariamente serán de alternativas (90%) y algunos de respuesta abierta bajo la creencia que pueden aportar más información sobre el CPC del profesor (10%). Esta etapa se medirá durante la aplicación del instrumento, que excede el marco del presente estudio.

6.6 Plan de Trabajo

La estrategia escogida para construir un banco de ítems de Estadística que tiene en cuenta los tres planos señalados, busca equilibrar:

(a) El contenido estadístico del currículo al que se refieren los problemas o tareas propuestas (plano cognitivo)

(b) Las competencias de enseñanza que debe activar el profesor para conectar su conocimiento de los alumnos en relación con la Estadística (plano cognitivo y epistemológico)

(c) Las competencias de enseñanza que activan el uso de representaciones matemáticas-estadísticas efectivas (plano cognitivo y didáctico)

(d) Las competencias de enseñanza que debe activar el profesor para realizar una adaptación de la Estadística al nivel escolar (plano didáctico)

Estas cuatro variables responden a un modelo sobre la enseñanza de la Estadística que postula unas situaciones, unas herramientas conceptuales y un sujeto profesor, quien al tratar de abordar las situaciones mediante las herramientas de que dispone, moviliza y pone de manifiesto su competencia de enseñante en la ejecución de los procesos correspondientes a la enseñanza de la Estadística.

6.6.1 El modo de selección de los ítems

El estudio realizó una revisión cuidadosa de diferentes modos de organizar los contenidos matemáticos-estadísticos, lo que incluyó textos escolares, cuadernos de matemáticas de alumnos del ciclo básico, ítems de pruebas nacionales e internacionales, investigaciones relacionadas sobre el CPC, con el pensamiento estadístico y con las representaciones, como también consideró algunas taxonomías específicas. El conjunto de conocimientos recogidos permitió la elección de ciertos ítems y posteriores ajustes.

La mantención de un cierto equilibrio de los contenidos de cada una de las tres áreas de explicitadas en el Eje de Datos y Azar (estadística, probabilidad e inferencia), y de los conceptos y actividades que son importantes en la enseñanza de la Estadística (la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones), contribuyeron en la construcción de los ítems. El conjunto de contenidos vincula los ítems con el currículo de matemáticas y abarca la diversidad de necesidades matemáticas-estadísticas de los profesores como enseñantes, (ver Tabla 14).

Nota de la autora:

En la lectura de los ítemes hay que tener en cuenta dos aspectos. El primero de ellos es que el test es construido para ser contestado on line, por ello los subítemes son contestados en forma lineal, uno por pantalla, no permitiendo que el sujeto aprenda de un ítem para responder a otro.

La segunda observación necesaria se refiere a que existen ítemes que se evalúan con un test al alumno (Anexo 4), y por ello el test CPC-DA permite comparar respuestas del profesor con las de los alumnos a quienes hace clases.

Tabla 14: Resumen estructural del Instrumento y características de los 20 ítems.

	Conocimientos explicitados en el currículo por nivel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Estadística	1 Datos cuantitativos	✓	✓					✓		✓	✓
	1 Datos cualitativos	✓	✓		✓						
	1 Tablas simples										
	2 Tablas dobles				✓						
	1 Pictograma		✓								
	3 Gráfico barra vertical	✓		✓		✓	✓				
	4 Gráfico barra horizontal		✓								
	5 Variable		✓					✓			
	5 Gráfico de barra múltiple			✓							
	5 Gráfico línea										
	6 Grafico circular										
	6 Media			✓				✓		✓	✓
	6 Mediana									✓	
	6 Moda					✓					✓
	8 Tablas de frecuencia										✓
	8Datos agrupados en intervalos										
Probabilidad	5 Términos relacionados al azar	✓	✓								
	6 Experimento aleatorio					✓	✓				
	6 Probabilidad como razón		✓								
	6 Ley de los grandes números										
	7 Probab como frecuencia relat.	✓	✓			✓					
	8 Equiprobabilidad										
	8 Espacio muestral										
	8 Evento o suceso										
	8 Cardinalidad de esp. muestral										
	8 Principio multiplicativo										
	8 Modelo de Laplace										
Inferencia	6 Población								✓		
	6 Muestra								✓		
	7 Tamaño y toma de muestra						✓		✓		
	8 Aleatoriedad en muestras								✓		
	8 MTC comportamien. muestras							✓			
Autor y año		PISA 2003	WATSON 2003	ESTRELLA, GÚZMAN 2010	ESTRELLA 2009	TOROK 2000	TOROK 2000	GARRET GARCIA 2005	PISA 2003	TIMSS 2007	GARFIELD 1992
Contexto		Dulces colores	Tom	Préstamo libros	Perro gatos	Ruleta gira 50	Ruleta inventan	Muestras Olimpiad.	Sondeo elección	Pantalón aviso venta	Alumnos hablan

	Conocimientos explicitados en el currículo por nivel	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Estadística	1 Datos cuantitativos	✓	✓			✓	✓				
	1 Datos cualitativos										✓
	1 Tablas simples								✓		
	2 Tablas dobles										
	1 Pictograma										
	3 Gráfico barra vertical		✓							✓	
	4 Gráfico barra horizontal								✓		
	5 Variable										
	5 Gráfico de barra múltiple										
	5 Gráfico línea										
	6 Grafico circular		✓								
	6 Media	✓									✓
	6 Mediana										✓
	6 Moda	✓									✓
	8 Tablas de frecuencia										
	8Datos agrupados en intervalos									✓	
Probabilidad	5 Términos relacionados al azar										
	6 Experimento aleatorio										
	6 Probabilidad como razón				✓	✓		✓			
	6 Ley de los grandes números			✓	✓						
	7 Probab como frecuencia relat.										
	8 Equiprobabilidad			✓		✓	✓				
	8 Espacio muestral						✓				
	8 Evento o suceso						✓				
	8 Cardinalidad de esp. muestral						✓				
	8 Principio multiplicativo										
	8 Modelo de Laplace			✓	✓		✓				
Inferencia	6 Población										
	6 Muestra										
	7 Tamaño y toma de muestra										
	8 Aleatoriedad en muestras										
	8 MTC comportamiento muestra										
Autor y año		Liu 1998	TIMSS 2007	FISCHBEIN 1997	FISCHBEIN 1997	FISCHBEIN 1997	FISCHBEIN 1997	PISA 2003	TIMSS 2007	SERCE 2009	SORTO 2004
Contexto		Alumnos pesan	Curso A B 40	Tres monedas	Nacim. Hospital	Lotería	Dados	Terre moto	Árboles chilenos	Robles plantad os	Nueve Mascot as

6.6.2 Construcción de la versión piloto del instrumento

Desde las fuentes antes descritas se recolectaron y eligieron más de 60 ítems. El análisis de los conceptos y actividades estadísticas y las características de enseñanza relativos a cada ítem, como su inclusión explícita en el nuevo ajuste curricular, propiciaron modificar enunciados y contextos, afinando la elección de ítems dentro de los escogidos.

La construcción de dos tablas de especificaciones, una para un instrumento que abarcaba contenidos del nivel 7, y otra del nivel 4, a modo de planificación sistemática permitieron orientar la elaboración del instrumento evaluativo. Su fin fue lograr una selección tanto de objetivos como de contenidos que fueran representativos de los requerimientos del eje Datos y Azar. La tabla de doble entrada, de objetivos y de contenidos, estableció el tipo de ítem, cantidad de ítems, puntuación asignada y tiempo máximo de respuesta, (Anexo 1).

Desde los registros de cuadernos de alumnos de los niveles 4 y 7, se detectaron errores en la construcción de los gráficos y algoritmo de cálculo de la mediana, como se muestra en las figuras 28 y 29. Los casos vistos exhibían errores en las áreas de las barras y en las escalas ejes. La situación detectada a nivel empírico, y también avalada por la revisión de literatura, permitió la creación de ítems que evaluaran la lectura de escalas en los ejes de gráficos de barra con escalas explícitas e implícitas.

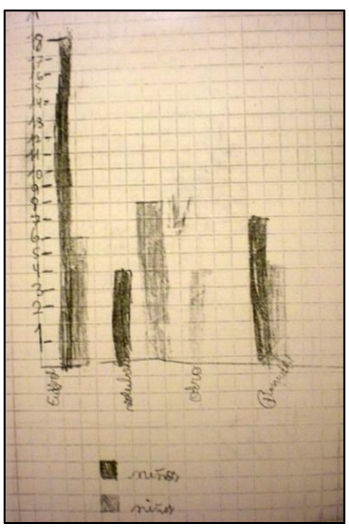


Figura 28: Uso de escala inadecuada y falta de categorías escritas en la variable nominal, nivel 4.

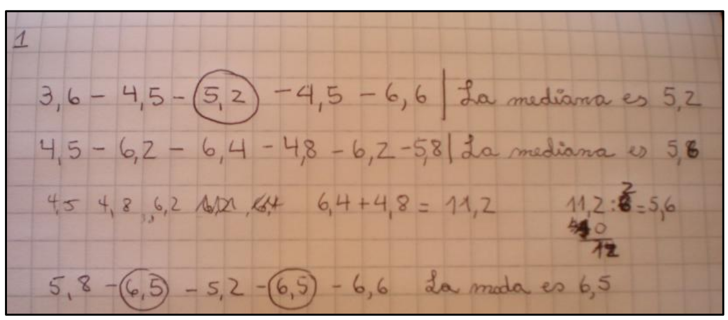


Figura 29: Determinación errónea de la mediana al no ordenar los datos, nivel 5.

Entre los ítems y subítems de la evaluación CPC-DA, once abarcan contenidos relativos a la interpretación de información procedente de una gráfica, once conciernen a medidas de tendencia central, 22 se relacionan con probabilidad, en cuatro intervienen tablas de datos, y seis corresponden a conceptos de aleatoriedad y muestras.

6.6.3 Ensayo de los ítems

Cada ítem se vincula, en primer lugar, a una de las áreas de contenido del eje Datos y Azar; en segundo término, cada ítem muestra una situación que lo contextualiza y dota de significado; y, en tercer lugar, cada ítem supone activar determinadas habilidades y capacidades de enseñanza en los profesores.

El instrumento es un cuestionario que integra problemas y/o situaciones contextualizadas, y es de tipo mixto con un 10% de preguntas abiertas y un 90% de alternativas.

Se realizaron ensayos de pruebas de algunos ítems con 30 profesores de educación básica en ejercicio y que se encontraban en formación continua en la universidad en enero del 2010, para evaluar sólo el conocimiento del contenido y con ello la comprensión de la situación problema. Al examinar las soluciones de los profesores se realizaron nuevas modificaciones a los ítems, o bien eliminación de algunos de ellos, debido a que no discriminaban y por tanto no contribuían a la idoneidad del instrumento.

Para probar los distractores, y en base a las posibilidades, un conjunto de 22 ítems de contenido fue probado con 27 alumnos del nivel 4, cuarto básico, y con 30 alumnos del nivel 5, quinto básico. En este análisis se contabilizaron las respuestas correctas, parcialmente correctas y las respuestas en blanco. Tras el protocolo de las respuestas dadas por los 57 alumnos, se detectaron errores y dificultades en las respuestas y en el proceso de resolución de los problemas. Esta prueba piloto del cuestionario, estimó las características psicométricas de los ítems y aportó una primera estimación de la fiabilidad de consistencia interna. También contribuyó a este proceso una entrevista realizada a una profesora del primer ciclo básico poniendo a prueba los ítems de carácter abierto del instrumento final.

Con la información entregada tras la aplicación y la entrevista se mejoró principalmente: la redacción de la situación problema, la precisión del lenguaje, la calidad de las imágenes o su posición en el enunciado del ítem, la ubicación de las alternativas de respuestas, el orden de presentación de los problemas, y la diversidad de representaciones. Este proceso de mejoramiento del instrumento permitió hacerlo más comprensible en la lectura y la visualización de los ítems.

Posteriormente se aplicó el instrumento (sólo ítems de contenido) a 13 alumnos con talento del Programa Beta PUCV, seis de nivel 7 y siete de nivel 8. Esta aplicación sirvió para determinar el equilibrio de dificultad de los ítems (diez ítems fueron muy fáciles y siete muy difíciles); y en cuanto a extensión y concentración requeridas para responderlas (demoraron entre 30 minutos a 50 minutos). Esta aplicación permitió validar las modificaciones realizadas anteriormente para ayudar a la comprensión y visualización de los ítems, efectuando así una segunda estimación de la fiabilidad de consistencia interna.

6.6.4 Modificación de los ítems

En la construcción y modificación de los ítems se consideró situar el problema a la realidad local, cognitiva y psicológica de los alumnos de los niveles en que el profesor debe enseñar, además de la concordancia con el eje de Datos y Azar del currículo chileno.

Se seleccionaron ítems de investigaciones y de pruebas internacionales que explícitamente habían sido construidos para activar procesos del pensamiento y razonamiento estadístico, tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, reflexionar, generalizar y formalizar al resolver el problema. En la construcción de las alternativas hubo un análisis continuo de los distractores para que éstos proporcionaran sentido a la solución en términos de la situación problema inicial, las observaciones de algunos jueces y la puesta a prueba con alumnos y profesores contribuyó considerablemente a esta tarea.

Otro proceso de adaptación y ajuste de situaciones problemas se realizó al ubicarlos en un mismo contexto. Esta determinación tuvo como propósito concentrar la atención del sujeto que responde en una única contextualización del problema, y conducir los esfuerzos de concentración y resolución a la actividad estadística y/o al CPC involucrado.

Un ejemplo de esta transformación se realiza en los ítems iniciales correspondientes a los ítems originales de SERCE (2009) y TIMSS (2007), cuyos contextos de origen eran “tiempo ocupado en ver televisión” y “árboles en un parque”. El dominio cognitivo del ítem es el razonamiento y el contenido es representación de datos. En ambos ítems la actividad central es pasar del registro tabular al gráfico y se pregunta por la representación correcta de los datos de la tabla a la representación gráfica. La situación problema de TIMSS presentaba una tabla simple y un gráfico circular, en cambio la situación de SERCE presentaba una tabla de datos agrupados y un gráfico de barra vertical, ver figura 30.

En la modificación realizada el ítem se sitúa en un solo contexto, “árboles en un parque chileno” (canelo, boldo, roble y pino) y cambio del registro gráfico de destino:

de tratamiento de datos en tabla a representación de gráficos de barra horizontales, y verticales, sin escala explícita en los ejes.

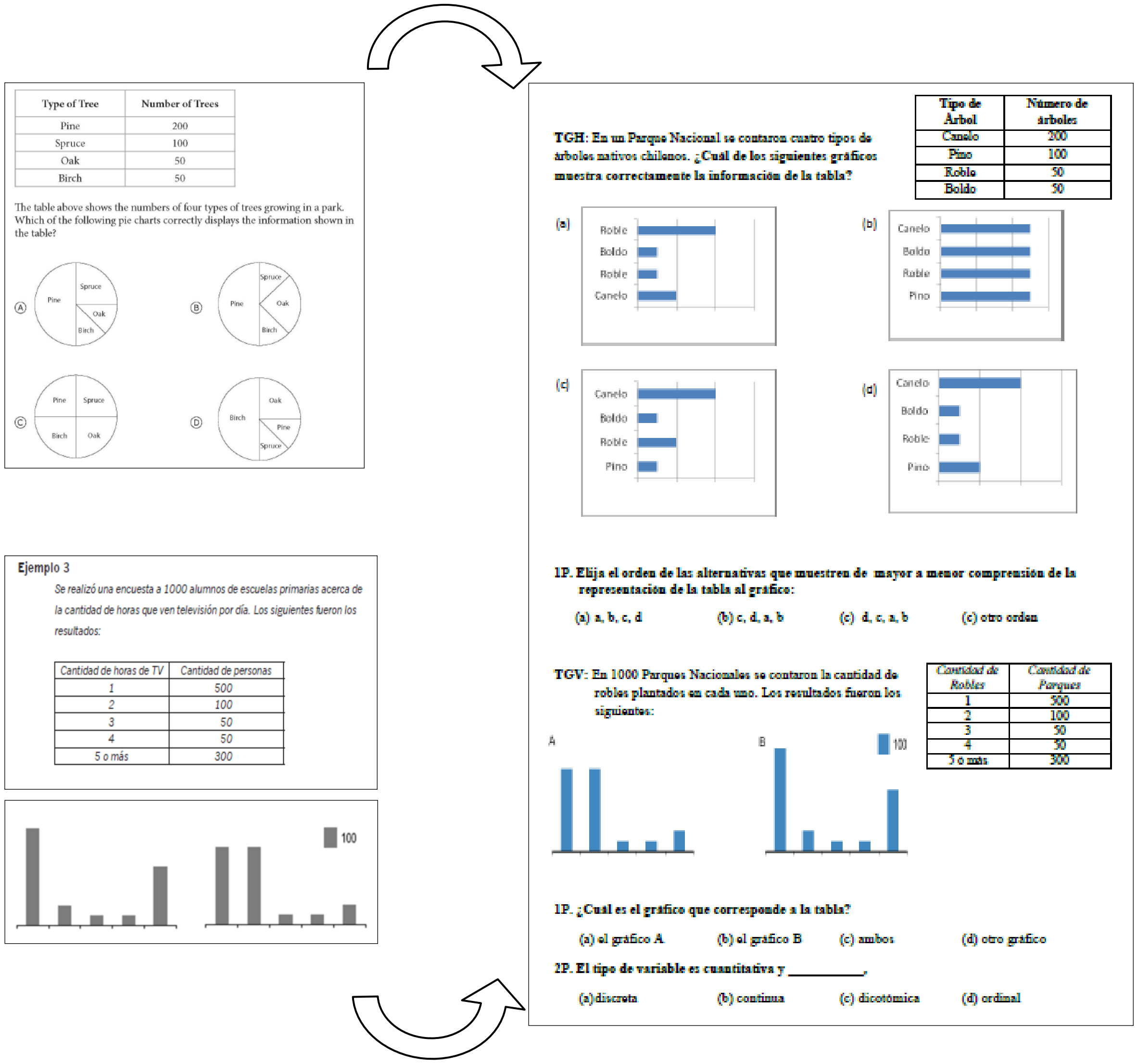


Figura 30: Ejemplo de dos ítems modificados, desde TIMSS y SERCE, e integrados en un único nuevo ítem recontextualizado.

En base al constructo de Shulman las preguntas dentro de los ítems comprendieron tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico del contenido del profesor. Con el fin de detectar el CPC en los profesores, además de las respuestas con alternativas, se crearon preguntas abiertas.

6.6.5 Análisis de cada Ítem según diversos aspectos

Los ítems finales exploran el tratamiento de datos y azar y tópicos que son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad, y el marco teórico asumido en este estudio.

En esta fase de análisis nuevamente se revisó cada ítem con la finalidad de: a) identificar el nivel taxonómico de la representación, b) recoger las fuentes de validez en su construcción, c) identificar el tipo de gráficos utilizados y d) caracterizar el tipo de preguntas utilizadas.

Para cada ítem se consideraron los siguientes aspectos: autor y año de creación, contenido mínimo obligatorio incluído en el currículo del ciclo básico chileno, CMO, clasificación taxonómica según Curcio (1987) —leer datos, leer entre datos y leer más allá de los datos—, clasificación según Garfield (2002) —alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico—, clasificación según CPC según conocimiento del contenido estadístico en la enseñanza, conocimiento del profesor en relación al saber del alumno, y por último, traducción entre representaciones, de texto escrito a gráfica, de tabla a gráfica, de gráfica a texto escrito, de texto a texto, de texto escrito a tabla, y de tabla a texto escrito, ver tabla 15.

Este análisis corroboró que el objetivo que todos ítems del instrumento se ajusten a los requerimientos del currículo actual, y el instrumento responde principalmente al marco teórico del conocimiento pedagógico del contenido asumido y categorizado en este estudio, y que definió y delimito el instrumento mismo; además, en forma equilibrada abarca los niveles de comprensión gráfica, las categorías de nivel cognitivo del aprendizaje en Estadística, y considera la diversidad de traducciones entre representaciones. El instrumento completo se encuentra en Anexo 2.

Tabla 15: Características del Instrumento según CMO, taxonomía de Curcio, nivel cognitivo, categoría del CPC y tipo de traducciones de representaciones

		Currí culo	Proceso para comprensión gráfica (Curcio)			Nivel cognitivo de aprendizaje, (Garfield)			Categoría del CPC		
Ítem y Contexto	Autor	Contenido Mínimo CMO	leer datos	leer entre datos	leer más allá de los datos	Alfabetización	Razonamiento	Pensamiento	CPC Enseñanza	CPC Alumnos	Traducción Representaciones
1 Dulces de colores	Estrella 2010	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Gr a Te
2 Tom al colegio	Watson 2003	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Gr a Te
3 Préstamos de Libros	Estrella, Guzmán 2010	✓	✓	✓	--	✓	✓	--	✓	✓	Gr a Te
4 Mascotas perro-gato	Estrella 2009	✓	✓	✓	--	✓	✓	--	✓	✓	Te a Ta
5 Ruleta gira 50	Torok 2000	✓	✓	✓	--	✓	✓	--	✓	--	Te a Gr
6 Ruleta* Inventa	Torok 2000	✓	--	--	✓	--	✓	✓	✓	--	Gr a Te
7 Muestras Olimpiadas	Garret García 2005	✓	--	--	✓	--	✓	✓	✓	--	Gr a Te
8 Sondeo elección	PISA 2003	✓	--	--	--	✓	--	--	✓	--	Te
9 Pantalón aviso venta	TIMSS 2007	✓	--	--	--	✓	✓	--	--	✓	Te
10 Alumnos hablan	Garfield 1992	✓	--	--	--	✓	✓	--	✓	--	Ta a Te
11 Alumnos pesan	Liu 1998	✓	--	--	--	✓	✓	--	✓	--	Ta a Te
12 Curso A y B	TIMSS 2007	✓	✓	✓	--	✓	✓	--	--	✓	Gr a Te
13 Tres monedas	Fischbein 1997	✓	--	--	✓	✓	✓	--	--	--	Te
14 Nacimientos	Fischbein 1997	✓	--	--	--	--	✓	✓	--	✓	Te
15 Lotería	Fischbein 1997	✓	--	--	--	✓	✓	--	--	✓	Te
16 Dados	Fischbein 1997	✓	--	--	--	✓	✓	--	--	✓	Te
17 Terremoto	PISA 2003	✓	--	--	--	✓	✓	--	✓	--	Te
18 Árboles Tab a GHori	TIMSS 2007	✓	✓	✓	--	✓	✓	--	--	✓	Ta a Gr
19 Árboles Tab a Verti	SERCE 2009	✓	✓	--	--	✓	--	--	--	--	Ta a Gr
20 Nueve Mascotas	Sorto 2004	✓	--	--	--	✓	✓		✓	✓	Ta a Te

De los 32 conocimientos explicitados en el Programa de Estudio del MINEDUC, el instrumento considera 29 CMO, lo que equivale a casi el 91% de los CMO del eje Datos y Azar. Desde la tabla 16 se observa que el instrumento inicial moviliza conocimientos de Estadística, de Probabilidades y de Inferencia.

Tabla 16: Distribución de los ítems por el conocimiento del contenido involucrado y la demanda cognitiva (código del ítem y su subítem).

Aspectos de Contenido Estadístico	Demanda Cognitiva		
	Alfabetización Estadística	Razonamiento Estadístico	Pensamiento Estadístico
Representación de datos numéricos	DUL (1E, 2E), LBE (1E), RRE (1E, 2E), TGH (1P), TGV (1P, 2P)	DUL (3E), LBE (2E), TDE (1E), CBE (1P)	
Medidas de Centro	RRE (4E), MEED (1P, 2P), MOD (1P, 2P)	MED (1E, 3P), OUT (1E)	
Medidas de dispersión	RRE (3E)		
Temas de Inferencia	MUE (1P)		PTM (1E), RRCP (1E, 2E, 3E), OLI (1P)
Temas de Probabilidad	RRE (5E), PLO (1P)	PDA (1P), PTE (1P)	DUL (4E), PMO (1P), NAC (1P)

El cuestionario considera 20 problemas en contexto que incluyen un total de 65 subítems tanto de CC como de CPC. De los 34 subítems de CC del instrumento según tema, se contabilizan 23 preguntas asociadas a los contenidos de Estadística Descriptiva, 2 ítems de Inferencia y 9 ítems de probabilidad.

De los 31 subítems referidos al CPC, 12 corresponden a la categoría de Enseñanza y 18 a la categoría de conocimiento del saber del alumno.

6.6.6 Estudio didáctico de cada Ítem

Hay tres ítems de tipo mixto (ítems 1, 19 y 20) y solo uno de respuesta abierta (ítem 2), los dieciséis restantes corresponden a tipo cerrado, de alternativas. En los ítems de tipo mixto y abierto se espera que los profesores respondan a preguntas abiertas, con la intención de que:

1) Sugieran respuestas, apropiadas e inapropiadas, de los estudiantes a los ítems (así evidencian su propio conocimiento del contenido a través de sus sugerencias de respuestas apropiadas, CC, y del conocimiento de sus estudiantes como aprendices a través de sus sugerencias de respuestas inapropiadas, CRAC).

2) Manifiesten como responderían a sus estudiantes, tras exponerles respuestas de estudiantes inapropiadas o incompletas a una pregunta, (así muestran su conocimiento de los estudiantes como aprendices y las estrategias del profesor para enfrentar las subcomprensiones o malentendidos o dificultades en la sala de clases, CRAC).

3) Indiquen entre qué contenidos curriculares ubican una situación problema dada, (así evidencian su conocimiento del nuevo ajuste curricular, en cuanto a niveles y contenidos, ENS-Currículo).

Al finalizar los análisis de los ítems se muestra una rúbrica para un perfil de profesor con CPC referido al CRAC de los ítems abiertos 1, 2 y 20, con 3 niveles de CPC.

El análisis a priori presenta un breve resumen del ítem, detalla el contexto, el tipo de representación[12], incluye una imagen del problema, el contenido mínimo obligatorio a los que responde, la movilidad de registros[13] que potencia, el contenido estadístico y el conocimiento pedagógico del contenido, el área específica de la Estadística, las respuestas o devoluciones esperadas y su puntaje.

Ítem 1

Resumen: El ítem DUL corresponde a un gráfico de barras vertical de la frecuencia de una variable cualitativa nominal. Fue inspirado de un ítem de PISA 2003 que sólo incluye la pregunta 4E. Se diseñó para medir los niveles de comprensión gráfica de Friel, Curcio, y Bright (2001): (1E) extraer in formación, (2E, 3E) encontrar relaciones, y (4E) ir más allá de los datos. Integra tópicos de Estadística Descriptiva y de Probabilidad.

[12] Representación en sentido lato.
[13] Registro en sentido lato.

Contexto: Dulces de colores en una bolsa. (Cod. DUL)

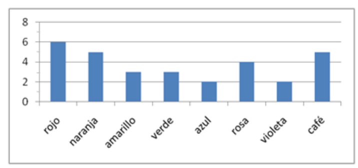
Representación: Gráfico de barras verticales con variable discreta y variable nominal.

CMO: "(4to) 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples verticales y horizontales, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia. (6to) 18. …estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento… 21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento… mediante el cálculo de la frecuencia relativa asociada a dicho evento e interpretación de dicha frecuencia a partir de sus formatos decimal, como fracción y porcentual".

Movilidad de registros: de gráfico a texto, de contexto a modelo y viceversa.

1E. leer gráfico, interpolar, extraer información de datos cuantitativos, lectura de escala. 2E. leer escala, extraer datos, comparar datos. 3E. leer escala, comparar cantidades, deducir datos desde operación matemática. 4E. leer escala, comparar cantidades, deducir datos desde operación matemática (probabilidad frecuentista).

DUL: Hay una bolsa con dulces de colores. El profesor de Trini le deja sacar un dulce de la bolsa, pero sin mirar dentro de la bolsa. El número de dulces de cada color se muestra en el siguiente gráfico.



1E. ¿Cuántos dulces naranja hay?
(a) 6 (b) 4 (c) 4,5 **(d) 5**

2E. ¿De qué colores hay exactamente 2 dulces?

(a) amarillo y verde (b) verde y azul **(c) azul y violeta** (d) naranja y violeta

3E. Para igualar la cantidad de dulces azules y dulces rojos. ¿Cuántos dulces azules faltarían colocar en la bolsa?

(a) 6 **(b) 4** (c) 2 (d) otra cantidad

4E. ¿Cuál es la probabilidad de que Trini saque un dulce de color rojo?

(a) 12,5% **(b) 20%** (c) 25% (d) 50%

CC: 1E, 2E, 3E (estadística descriptiva) y 4E (noción de probabilidad).

1E. La alternativa (d) evidencia una correcta lectura de escala e interpolación, (2). El distractor (c) muestra una acción de interpolar aunque errónea, (1). Las alternativas (a) y (b) presentan valores explícitos en el eje, pero no interpolan, (0).

2E. La alternativa (c) muestra una correcta lectura de escala del eje y comparación de altura de barras, (2). El distractor (a) considera dos barras con la misma altura pero incorrecta lectura de la escala del eje, (1). Las alternativas (b) y (d), no obtienen puntaje, (0).

3E. La alternativa (b) evidencia correcta lectura de escala de altura de dos barras, y su sustracción, (2). Los distractores (a) y (c) muestran correcta lectura de escala pero no responden a la pregunta, (0). Si no contesta o (d), tiene 0 puntos, (0).

4E. Sólo la alternativa (b) da la razón correcta, 6 dulces rojos de un total de 30 dulces, 6/30=1/5=20/100 y la lleva a su forma porcentual, (2). Los distractores (a), (c) y (d) corresponden a errores usuales en el cálculo de frecuencias relativas, (0). (Ver análisis de 4P, 5P y 6P).

CPC: Enfocadas solo en el subítem 4E las preguntas conciernen a 2P (CRAC-Errores), 3P (Enseñanza-Currículo), 4P, 5P y 6P (CRAC-Dificultades). El subítem 1P responde a CC.

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 4E

1P. ¿Cuáles son las principales ideas estadísticas en este problema?

……………………………………………………………………………………

2P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

12,5 % pues hay 8 colores y debe sacar 1 color que es el rojo, entonces 1/8 = 125/1000= 12,5%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

……………………………………………………………………………………

5P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Hay 6 dulces de color rojo y (5+3+3+2+4+2+5=24) 24 de los otros colores, 6/24=1/4= 25%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

……………………………………………………………………………………

6P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

La barra del rojo es la más alta y el porcentaje mayor es 50%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

……………………………………………………………………………………

Respuestas Esperadas desde ítem 4E (respuesta correcta (b)):

1P. La idea de variabilidad o predicción en situaciones de incerteza (2). Frecuencia, porcentaje, frecuencia relativa o porcentual, (1). Lectura de pictogramas, interpretación de gráfico, (0).

2P. Las respuestas más apropiadas involucran las razones 1/5 ó 6/30 ó 0,2 ó 20/100, incluyendo la distinción que las probabilidades están entre 0 y 1, obtiene 2 puntos, (2). Si establece que la probabilidad es 20%, o 20, obtiene 1 punto, (1). No contesta o entrega otro valor, (0).
La respuesta inapropiada puede involucrar las situaciones detalladas en 4P, 5P y 6P, u alguna otra con sentido similar, (2). Otra respuesta inapropiada pero no argumenta, (1). No contesta, (0).

3P. Vincula con elementos del CMO del eje de Datos y Azar relacionado con Probabilidad desde el nivel 5 hasta nivel 8, (2). Frecuencia, frecuencia relativa pero sin asociar la probabilidad, obtiene solo 1 punto, (1). Si entrega otra razón o no contesta o sólo vincula con CMO de matemática, (0).

4P. Si argumenta basado en el total —30— y a la frecuencia —6—, o si destaca que se pregunta por el “dulce rojo” y no por el “color rojo”, obtiene 2 puntos, (2). Si reafirma el error pero no da argumentos, (1). Si establece que no es error o no contesta, (0).

5P. Si argumenta respecto al total de dulces, es decir 30 y no 24, (2). Si afirma el error pero no entrega argumentos para la comprensión, (1). Si establece que no es error o no contesta, (0).

6P. Si señala al alumno que el total es 30 y el 50% de 30 es 15 y extrae la altura de la barra asociada a los dulces rojos, o muestra que el 50%, no se presenta en una sola barra, o lleva la atención a la comprensión del contexto y extracción de los datos tomando en cuenta el total de dulces, (2). Si reafirma el error pero no da argumentos que lleven a la comprensión al estudiante, (1). Si establece que no es error o no contesta, (0).

Ítem 2

Contexto: Cómo llegan los estudiantes a la escuela. (Cod. PTM)

Resumen: El ítem PTM corresponde a un gráfico tipo pictograma que relaciona tópicos de Inferencia. Subyace un gráfico de barras múltiples horizontal pues distingue una variable cualitativa (género). Adoptado casi completamente desde Watson (2003), solo levemente modificado en el lenguaje y en la gráfica.

Representación: Gráfico de barras múltiples horizontal tipo pictograma.

CMO: “(2do) 19. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde… pictogramas, que

Cómo llegan los estudiantes a la escuela en el día de hoy.

PTM. Observa el gráfico de arriba y responde,

1P: Tom no está en la escuela hoy día. ¿Cómo piensa que va a llegar a la escuela mañana? ¿Por qué?

…………………………………………………………………………………

2P. ¿Cuáles son las principales ideas de estadística en este problema?

…………………………………………………………………………………

3P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

…………………………………………………………………………………

4P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

5P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Bicicleta, la mayoría de los niños va en bicicleta a la escuela. **¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?**

…………………………………………………………………………………

6P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Tom vendrá a la escuela en tren porque no hay nada al lado de tren así que debe ser él. **¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?**

…………………………………………………………………………………

7P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Bus, porque hay una regularidad y el siguiente es un niño. **¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?**

…………………………………………………………………………………

contienen datos cuantitativos extraídos desde el entorno escolar… para responder a preguntas planteadas. (5to) 19. Estudio del comportamiento o tendencia de variables, mediante la lectura de gráficos… 21. Descripción de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas y argumentación acerca de la posibilidad de ocurrencia de estos. (6to) 18. …estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento… (7mo) 21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio simple y contrastación de ellas mediante el cálculo de la frecuencia relativa asociada a dicho evento e interpretación de dicha frecuencia a partir de sus formatos decimal, como fracción y porcentual”.

Movilidad de registros: de gráfico a texto, de modelo a contexto y viceversa.

1P. y 2P. Leer gráfico, extraer información cuantitativa, comparar. Leer gráfico, formular afirmaciones respecto a la representación a la que hace referencia, (variabilidad en escenarios de incertidumbre). Interpretar información, predecir posibilidad de ocurrencia de una situación en el contexto. Distinguir entre variable discreta y variable nominal. Diferenciar entre modelo estadístico y gráfico de representación de datos.

CC: 1P y 2P (inferencia)

1P. Infiere significados de incerteza a través de sus respuestas específicas al problema de Tom como “Probablemente en bus, como 1/3 de los niños que llegaron hoy”, (2). Los siguientes argumentos: mayoría según género; o mayoría de los niños llega en bicicleta; o en bus o caminando que es lo corriente, tienen sólo 1 punto, (1). Si elige tren u otro transporte, si personifica a Tom entre sus propios alumnos, si no considera la variación, si no responde o una respuesta sin sentido, tiene 0 puntos, (0).

2P. Articula secuencias de conceptos relacionados de probabilidad, (con un lenguaje de posiblemente, mayoría, probablemente, casi todos). Si hace explícita la idea de variabilidad o predicción en situaciones de incerteza, (2). Si indica conceptos o procedimientos simples como, frecuencia, porcentaje, frecuencia relativa, razones, (1). Si entrega otra razón o no contesta, (0).

CPC: las preguntas conciernen a 3P (CRAC - Errores), 4P (Enseñanza –Currículo); 5P, 6P y 7P (CRAC-Dificultades).

Respuestas Esperadas a los ítems:

3P. La más apropiada considera la probabilidad de los niños respecto al total, del tipo 9/27, 3/9 ó 1/3, “Probablemente en bus, como 1/3 de los niños que llegaron hoy", tiene 2 puntos, (2). Si concluye en bus pero se equivoca en el cálculo, o da sólo la razón de mayoría de niños, (1). Otras respuestas, como en bicicleta, en tren, en bus pero alude a una regularidad en la representación, obtiene 0 puntos, (0).

4P. Vincula integrativamente con elementos del CMO del eje de Datos y Azar relacionando con escenarios de incerteza desde nivel 5 hasta nivel 8, o relaciona con Inferencia en los niveles de 6 al 8, (2). Si utiliza términos como frecuencia, fracciones, razones, pero no los articula, (1). Si indica los conceptos de pictograma, lectura de gráficos, no sabe o no contesta, obtiene 0 puntos, (0).

5P. Si señala que de los 14 niños, 8 no son ciclistas, así que la mayoría de los niños no llegan en bicicleta a la escuela, o realiza devolución del tipo ¿De los estudiantes que andan en bicicleta la mayoría son niños, eso significa que ¿si son niños la mayoría anda en bicicleta?, o ¿cómo van todos los estudiantes?, obtiene 2 puntos, (2). Otra idea pero sin argumentar, (1). Una idea sin sentido, o no sabe o no contesta, o le indica la respuesta correcta sin responder a la dificultad, (0).

6P. Si realiza devoluciones del tipo, ¿y podría venir caminando?, ¿o en bus?, ¿cómo llega la mayoría?, ¿y la minoría?, o "el gráfico muestra todos los transportes de cómo llegar a la escuela y no necesariamente todos se usan", o si le invita a leer cuantos alumnos vienen en cada transporte, (2). Otra idea pero no entrega argumentos, (1). Una idea sin sentido, o no sabe o no contesta, o le indica la respuesta correcta sin responder a la dificultad, (0).

7P. Si realiza una devolución señalando otra regularidad (como en la fila del auto), o si aclara que el orden de aparición puede ser otro, o pregunta ¿cómo llega la mayoría? ¿Y la minoría?, obtiene 2 puntos, (2). Otra idea pero no entrega argumentos, (1). Una idea sin sentido, o no sabe o no contesta, o le indica que está en lo correcto, (0).

Ítem 3

Contexto: Préstamos de libros en Biblioteca. (Cod. LBE)

Resumen: El ítem LBE corresponde a un gráfico de barras múltiple vertical del cual debe extraerse una medida de centro. Este tipo de gráfico es ampliamente ocupado en diversos textos, se diseñó con la intención de indagar el tipo de error que se comete al calcular el promedio de categorías distintas al extraer datos desde un gráfico. Integra ítems de Estadística Descriptiva.

Representación: Gráfico de barras múltiple vertical.

CMO: "(4to) 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples verticales y horizontales, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia. (5to) 17. Interpretación y comparación de información presentada en gráficos de barras múltiples y gráficos de líneas. Discusión sobre el tipo de información que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras múltiples y gráficos de líneas. (6to) 17. Cálculo de la media aritmética, mediana y moda, en forma manual y usando herramientas tecnológicas para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan…"

Movilidad de registros: de gráfico a registro numérico, de contexto a modelo y viceversa.

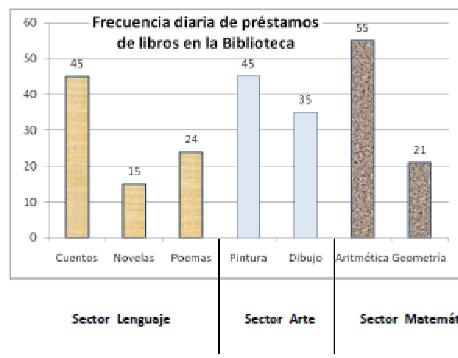
1E. leer gráfico, extraer información de datos cuantitativos por categorías. Distinguir entre la variable discreta y categorías con variable nominal. Calcular medias por categorías, comparar las medias obtenidas.

2E. Argumentar obtención de medias.

CC: 1E, 2E (estadística descriptiva)

1E. (b) Por categorías, suma las frecuencias absolutas dadas sobre cada barra vertical, dividir por el número de subcategorías y obtiene el promedio del número de préstamos.

LBE. Observa cuidadosamente el gráfico y responde marcando la alternativa correcta,



1E. ¿Cuál es el sector que tiene mayor promedio de número de préstamos?

(a) Sector Lenguaje (b) Sector Arte (c) Sector Matemática (d) Todos los sectores

2E. Anita respondió que el promedio de préstamos del sector de Matemática fue de (55+21)/2=38 por lo que el sector Matemática fue el de mayor promedio de préstamos.

¿Consideras que tiene razón?

(a) Sí, porque considera la barra más alta del gráfico.

(b) No, porque hay otro Sector con promedio mayor.

(c) No se puede saber

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 1E

1P. Considere que Ud. ya ha pasado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

2P. La estrategia exitosa de sus alumnos sería,

(a) Responder directamente desde el gráfico. (b) Calcular el promedio con todas las barras.

(c) Calcular el promedio por Sector y comparar. (d) Calcular las sumas por Sector y comparar.

3P. ¿Para qué nivel cree Ud. que esta pregunta se adapta mejor?

(a) 5 E.B. (b) 6 E.B (c) 7 E.B (d) 8 E.B

¿Por qué?, ____________________

2E. (b) Este distractor trata de dirimir la respuesta de la primera pregunta, pues solicita argumentar lo obtenido en 1E. Si responde (a) se reafirma que visualiza la altura de la barra, si responde (c) se reafirma que respondió considerando sólo la suma de las subcategorías.

CPC: Enfocadas solo en el subítem 1E las preguntas conciernen a 1P (CRAC-Conocimientos Adquiridos), 2P (CRAC-Estrategias), y 3P (Enseñanza–Currículo).

Respuestas Esperadas a los ítems:

1P. Cualquier opción es válida (a, b, c, d) si ésta coincide con la respuesta a la misma pregunta 1E entregada por sus alumnos, tiene 2 puntos, (2). La opción (a) equivale a mayor igual que el 65%, la opción (b) equivale al intervalo porcentual [50, 65[, la opción (c) equivale a]35, 50[, y la opción (d) equivale a menor igual 35%. Sólo 1 punto (1) si la diferencia es de 1 intervalo. Sin puntos, si la diferencia es de 2 intervalos, (0).

2P. Cualquier opción es válida (a, b, c, d) si ésta coincide con la respuesta a la misma pregunta 1E entregada por sus alumnos. Tiene 2 puntos (2) si coincide su respuesta (a) con la (c) del alumno, o su respuesta (b) con la (d) del alumno, o su respuesta (c) con la (b) del alumno, su respuesta (d) con la (a) del alumno. Sin puntaje (0) si contesta diferente.

3P. Está respuesta es mixta. Si contesta (a) tiene 0 puntos por la complejidad del gráfico múltiple, si es (b) 1 punto, si contesta (c) o (d) obtiene 1 ó 2 puntos dependiendo de su argumentación en base al manejo del contenido de gráfico múltiple según su posición y otras variables del currículo.

Ítem 4

Contexto: Mascotas (Cod.TDE)

Resumen: El ítem fue diseñado sobre un contexto usual de tipos de mascotas con el fin de evaluar la traducción desde el conteo y texto a la representación tabular. Pretende detectar la comprensión a nivel lógico del uso de tablas de doble entrada, así como la confusión entre listas yuxtapuestas o como cruce de listas de las tablas de doble entrada. Este ítem integra tópicos de Estadística Descriptiva.

Representación: Tabla de doble entrada

CMO: "(2do) 18. Representación de datos cuantitativos o cualitativos, en tablas de doble entrada y pictogramas, recolectados sobre objetos, personas y animales del entorno escolar y familiar…"

Movilidad de registros: de lista con conteo a tabla de doble entrada, de contexto a modelo y viceversa.
1E. Interpretar recolección de datos cualitativos. Identificar y extraer de datos cuantitativos desde datos cualitativos (conteo). Leer y distinguir los márgenes de la tabla de doble entrada (encabezados). Clasificar los datos y completar la tabla de 2x2 con datos cuantitativos.

TDE. Juan preguntó a sus compañeros si tenían algún perro o gato de mascota. Él marcó con un ✓ las mascotas de cada uno, y recolectó la información siguiente:

Perros y gatos de mis compañeros								
Héctor	perro✓	gato	Karla	perro✓	gato	Rocío	perro✓	gato✓
Matías	perro	gato✓	María	perro	gato	Diego	perro	gato✓
Anita	perro	gato	Keiko	perro	gato✓	Consuelo	perro✓	gato
Tatiana	perro✓	gato	Fran	perro	gato✓	Isabel	perro✓	gato
Juan	perro	gato✓	Yanet	perro✓	gato✓	Seba	perro✓	gato

Para completar la tabla, Juan recibió la ayuda de unos amigos.
1.E ¿Cuál de estas ayuda es correcta?

Indica la alternativa que señale los valores del interior de esta tabla,

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato		
No tiene gato		

(a)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	6
No tiene gato	5	2

(b)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	5
No tiene gato	6	2

(c)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	8	7
No tiene gato	6	2

(d) Otra

1P. ¿En qué nivel propone el currículo el contenido involucrado en esta pregunta?

(a) 1 EB (b) 2 EB (c) 4 EB (d) 5 EB

2P. Considere que Ud. ya ha pasado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

CC: 1E (estadística descriptiva)

1E. La respuesta (b) es la correcta (2). Todas las demás opciones tienen 0 puntos. El distractor (a) obedece a no considerar que el dato obtenido del conteo responde a dos variables –tener o no un tipo de mascota-, específicamente cuenta 8 no perros pero no subcategoriza en si/no gato, así 2+6=8. El distractor (c) es para aquellos que leen/completan por columnas una tabla de doble entrada, y en "Tiene perro" completan ambas casillas con el valor 8 del conteo, y/o suman los "No tiene perro" independiente de Si/no "Tiene gato", así 5+2=7.

CPC: las preguntas conciernen 1P (Enseñanza-Currículo) y 2P (CRAC-Conocimientos Adquiridos).

Respuestas Esperadas a los ítems:

1P. Si responde (b) conoce el currículo, obtiene 2 puntos, (2). Si contesta (c) aunque conoce el currículo adapta en otro nivel, tiene un punto, (1). Sin puntaje si contesta (a) pues recién comienza el eje datos y Azar, o (d) por desconocimiento del currículo, (0).

2P. Cualquier opción es válida (a, b, c, d) si ésta coincide con la respuesta a la misma pregunta 1E entregada por sus alumnos, tiene 2 puntos (2). La opción (a) equivale a mayor igual que el 65%, la opción (b) equivale al intervalo porcentual [50, 65[, la opción (c) equivale a]35, 50[, y la opción (d) equivale a menor igual 35%. Sólo 1 punto (1) si la diferencia es de 1 intervalo. Sin puntos (0) si la diferencia es de 2 intervalos.

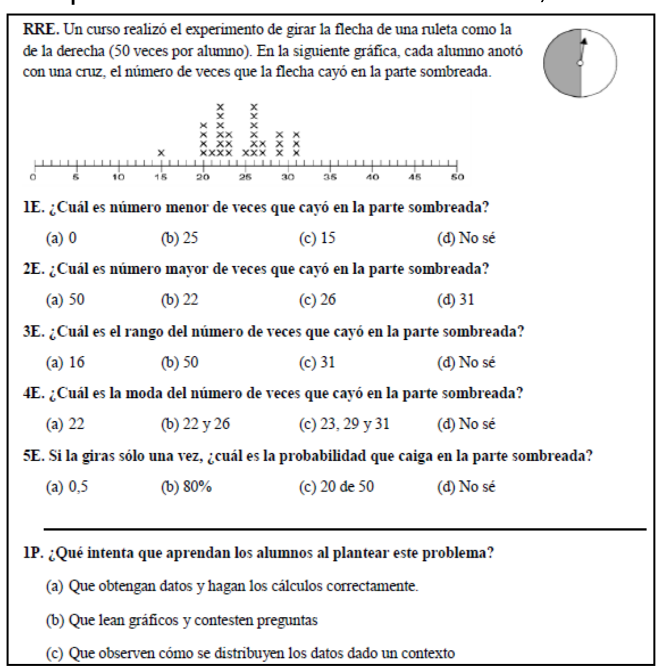
Ítem 5

Contexto: Experimento de girar ruleta 50-50. (Cod.RRE)

Resumen: El ítem RRE presenta un gráfico de frecuencias verticales dispuestas como cruces sobre una recta numérica, propuesto por Torok (2000) con el fin de explorar la familiaridad con las características básicas de un gráfico de distribución de resultados en ensayos repetidos. Es un ítem de Estadística Descriptiva que integra un subítem de Probabilidad.

Representación: Gráfico de frecuencias horizontal sin eje de ordenada.

CMO: “(6to) 17. Cálculo… de moda,… para caracterizar información presente en diversos contextos… (6to) 18. Repetición de un experimento aleatorio simple en contextos lúdicos y estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento… (7mo) 21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio… e interpretación de dicha frecuencia a partir de sus formatos decimal, como fracción y porcentual”.


RRE. Un curso realizó el experimento de girar la flecha de una ruleta como la de la derecha (50 veces por alumno). En la siguiente gráfica, cada alumno anotó con una cruz, el número de veces que la flecha cayó en la parte sombreada.

1E. ¿Cuál es número menor de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 0 (b) 25 (c) 15 (d) No sé

2E. ¿Cuál es número mayor de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 50 (b) 22 (c) 26 (d) 31

3E. ¿Cuál es el rango del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 16 (b) 50 (c) 31 (d) No sé

4E. ¿Cuál es la moda del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 22 (b) 22 y 26 (c) 23, 29 y 31 (d) No sé

5E. Si la giras sólo una vez, ¿cuál es la probabilidad que caiga en la parte sombreada?

(a) 0,5 (b) 80% (c) 20 de 50 (d) No sé

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos al plantear este problema?

(a) Que obtengan datos y hagan los cálculos correctamente.

(b) Que lean gráficos y contesten preguntas

(c) Que observen cómo se distribuyen los datos dado un contexto

Movilidad de registros: de gráfico a registro numérico, de contexto a modelo y viceversa.

1E. Identificar la variable de estudio. Leer literalmente de la representación gráfica de la recolección de datos.

2E. Identificar la variable de estudio. Leer discriminativa y comparativamente.

3E. Obtener datos cuantitativos, comparar, calcular una operación matemática y obtener rango.

4E. Comparar datos recolectados y obtener moda desde el gráfico.

5E. Calcular probabilidad teórica de una representación del experimento aleatorio.

CC: 1E, 2E, 3E y 4E (estadística descriptiva), 5E (probabilidad).

1E. La respuesta correcta es 15 veces (c), 2 puntos (2). El distractor (b) responde a otra menor frecuencia, 1 punto (1). Las otras alternativas tienen 0 puntos (0): el distractor (a) corresponde al valor mínimo del único eje horizontal numerado, y la opción “No sé” se asocia a una dificultad explícita de lectura de este tipo de gráfica.

2E. La respuesta correcta es 31 veces (d), 2 puntos (2). Las alternativas (b) y (c) responde a las más altas frecuencias -22 y 26- y tienen una “X” sobre sí, 1 punto (1). El distractor (a) corresponde al valor máximo que muestra el único eje horizontal numerado pero sin “X”, (0).

3E. La respuesta correcta es 16 veces (a), 2 puntos (2). Todas las otras alternativas tienen 0 puntos (0): el distractor (b) corresponde al valor máximo del eje numerado, el (c) corresponde al mayor número de veces, y la opción “No sé” se asocia a una dificultad explícita de lectura de este tipo de gráfica.

4E. La distribución es bimodal, por ello la respuesta correcta es (b), 2 puntos (2). El distractor (b) solo considera un valor modal tiene 1 punto, (1). Las restantes alternativas tienen 0 puntos (0): el (c) considera tres frecuencias que se repiten, y la opción “No sé” se asocia a una dificultad explícita de lectura de este tipo de gráfica.

5E. Dada la imagen de la ruleta que está dividida en dos partes iguales, la respuesta correcta es 0,5, la alternativa (a), 2 puntos (2). Las alternativas (b) y (c) indican algún valor de predicción, (1). La opción “No sé” se asocia a una dificultad explícita de predicción de probabilidad dado un experimento equiprobable con dos estados, (0).

CPC: La pregunta concierne a 1P (Enseñanza –Creencias sobre la Estadística)

Respuestas Esperadas a los ítems: (sin puntaje)

1P. El profesor que contesta (a) muestra una concepción de que su proceso de enseñanza es de tipo procedimental con énfasis en el uso de datos numéricos y cálculos correctos. La (b) evidencia una enseñanza de la estadística con énfasis en la comprensión de las representaciones graficas y solución a preguntas. La (c) enfatiza su enseñanza de la estadística donde el contexto y la visualización son componentes esenciales. Si contesta (d) concibe su proceso de enseñanza según lo establecido por el programa oficial.

Ítem 6

Contexto: Experimentos de girar ruleta 50-50 simulados o reales. (Cod. RRCP)

Resumen: El ítem RRCP presenta tres gráficos de frecuencias verticales dispuestas como Xs sobre una recta numérica con el fin de enfocarse en la variación, propuesto por Torok (2000), dos de ellos muestran improbables situaciones de variación, o demasiado perfecta o con mucha variación.

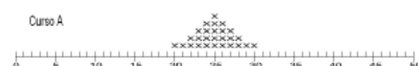
Representación: Gráfico de distribución sin eje de ordenada.

CMO: “(II) 17. Análisis de las características de dos o más muestras de datos, haciendo uso de indicadores de tendencia central, posición y dispersión. (III) 16. Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos… (III) 17. Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta…”. (Estos CMO están fuera del currículo del ciclo básico, pero las ideas de variación y distribución son esenciales en Estadística).

RRCP. Imagine que otros tres cursos crean gráficos para la ruleta. Se cree que algunos resultados fueron inventados y otros son reales.

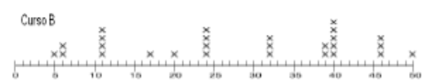
1E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso A, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ______________



2E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso B, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ______________



3E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso C, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ______________

1P. ¿Cuál de las siguientes opciones reflejaría su idea central al plantear este problema a sus alumnos?

(a) Para que sepan que Ud. sabe detectar cuando hacen trampas.

(b) Tomen decisiones razonadamente en base a la varianza

(c) Observen cómo se distribuyen los datos y observen la variabilidad

(d) Para que refuercen su lectura de gráficos y contesten preguntas correctamente

Movilidad de registros: de gráfico a registro escrito, de modelo a contexto.

CC: 1E, 2E y 3E (estadística descriptiva e inferencia).

1E. Inventado (a) es la correcta. Su argumentación del tipo “nunca podría llegar a ser así…”, 2 puntos (2).

2E. Inventado (a) es la correcta. Su argumentación del tipo “demasiado espaciados”, 2 puntos (2).

3E. Reales (b) es la correcta. Su argumentación del tipo “porque no es tan perfecta”, o “no está tan espaciado”, 2 puntos (2).

CPC: Enfocadas solo en el subítem 1E las preguntas conciernen a 1P (Enseñanza–Currículo)

Respuestas Esperadas a los ítems: (sin puntaje)

1P. El profesor que contesta (a) muestra una concepción de que su enseñanza es más cercana a la norma que al contenido. La (b) enfatiza su enseñanza de la estadística como herramienta para la toma de decisiones. La (c) evidencia una enseñanza de la estadística con énfasis en la comprensión de las representaciones gráficas y comprensión de conceptos. Si contesta (d) concibe su proceso de enseñanza con uso de representaciones pero alejadas del contenido principal.

Ítem 7

Contexto: Dos grupos en Olimpiadas de Matemáticas. (Cod. OLI)

Resumen: El ítem OLI obtenido desde un estudio de Garret (2005) fue modificado en su lenguaje, y tiene como objetivo ver la interpretación de distribuciones de medias iguales dadas gráficamente; comprobar la correcta extracción y manipulación de datos para calcular la media ponderada desde un gráfico, y detectar el uso de la varianza como criterio al comparar dos muestras, según su apariencia visual. Es un ítem de Inferencia que integra tópicos de Estadística Descriptiva.

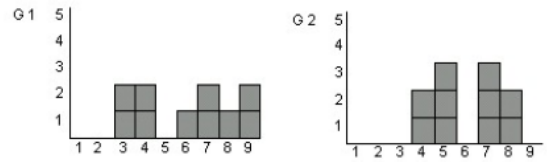
Representación: Gráficos de distribución de variables numéricas.

CMO: “(6to) 17. Cálculo de la media aritmética… para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan… (8vo) 19. Análisis del comportamiento de una muestra de datos, en diversos contextos, usando medidas de tendencia central y argumentación acerca de la información que ellas entregan”.

Movilidad de registros: de gráfico a registro escrito, de modelo a contexto y viceversa.

1P. Interpretar gráficos tipo barra que muestran las distribuciones de los datos, lectura de ejes con variables cuantitativas. Extraer datos cuantitativos desde el gráfico, y cálculo de media aritmética de cada situación. Comparar e interpretar dos medias aritméticas. Comparar dos gráficas en cuanto a la dispersión de los datos, por ejemplo, rango. Obtener información en base a comparación de variación con medias iguales.

OLI: Veinte alumnos de secundaria participan en una Olimpiada de Matemáticas. Diez de los alumnos forman el Grupo 1 y los otros diez forman el Grupo 2. Los puntajes obtenidos en la Olimpiada se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada cuadro en la gráfica representa el puntaje obtenido por cada estudiante en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1 los dos cuadros que aparecen por encima del número 9 significan que dos estudiantes en este grupo obtuvieron 9 puntos.

1P. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Grupo 1 es mejor que el Grupo 2, porque en el primero están los alumnos que recibieron puntajes más altos.

(b) Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con puntajes inferiores a 4.

(c) No hay ninguna diferencia entre los dos grupos porque el promedio es el mismo.

(d) Si bien los promedios son los mismos para ambos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo y por lo tanto es mejor.

2P. Elija la opción que Ud. considere que reuna los conocimientos necesarios y puestos en juego para responder:

(a) Análisis de gráfico, cálculo de promedio, distribución de medias iguales

(b) Leer datos del gráfico, comparar máximo y mínimo, obtener de moda, distribución

(c) Extraer datos de gráfico, media ponderada, distribución de medias iguales, varianza

(d) Análisis de histograma, media, distribución, varianza

CC: 1P (inferencia).

1P. La respuesta correcta (d) se refiere a la homogeneidad, interpreta las distribuciones de dos muestras por su apariencia visual, tomando en cuenta la dispersión de los datos cuando comparan grupos con las mismas medias, obtiene 2 puntos, (2). La respuesta (c) muestra que si bien calcula en forma correcta la media, (y por lo tanto extrae datos desde el gráfico y realiza bien el cálculo) no considera la dispersión de los datos, (1). Las opciones (a) y (b) no obtienen puntaje (0), pues muestran sólo un concepto local de asociación de variables, según los valores máximo o mínimo, con el cual explican las diferencias entre dos muestras.

CPC: La pregunta concierne a 2P (Enseñanza–Organización de Tareas Matemáticas Escolares)

Respuestas Esperadas a los ítems:

2P. El profesor que contesta (c) muestra una secuencia lógica de obtención de la información requerida, extracción de datos-obtención de media, distribución de muestras de igual media y toma en cuenta la variabilidad, 2 puntos (2). Si elige la alternativa (a) muestra ausencia de variabilidad de la distribución, solo 1 punto, (1). Las opciones (b) y (d) no obtienen puntaje, pues en (b) los valores máximos, mínimos y modal no contribuyen a la organización de la tarea; y en (c) el concepto de histograma no es parte de la secuencia necesaria para responder con éxito a la situación.

Ítem 8

Contexto: Sondeo elecciones. (Cod. MUE)

Resumen: El ítem MUE es adaptado del estudio PISA 2003 y desde una situación pública explora los conocimientos básicos de inferencia sobre muestras, población y muestreo que maneja un ciudadano informado.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: "(6to) 16. Distinción entre los conceptos de población y muestra… (7mo) 19. Caracterización de la representatividad de una muestra, a partir del tamaño y los criterios en que esta ha sido seleccionada desde una población. Discusión acerca de cómo la forma de escoger una muestra afecta las conclusiones relativas a la población. (7mo) 20. Discusión acerca de la manera en que la naturaleza de la muestra, el método de selección y el tamaño de ella afectan los datos recolectados y las conclusiones relativas a una población. (8vo) 18. Discusión respecto de la importancia de tomar muestras al azar en algunos experimentos aleatorios para inferir sobre las características de poblaciones, ejemplificación de casos".

MUE: En cierto país, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo a cierto candidato a Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en todo el país. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación:

• *Periódico 1*: 36,5% (sondeo realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
• *Periódico 2*: 41,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
• *Periódico 3*: 39,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
• *Periódico 4*: 44,5% (sondeo realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

1P. Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al candidato a presidente?

(a) Periódico 1, por estar a principios de mes y es una muestra al azar
(b) Periódico 4, porque son 1000 votantes y es una encuesta telefónica
(c) Periódico 3, por estar cercana a la elección y es una muestra al azar de 1000 votantes
(d) Periódicos 3 y 4, por ser sondeos de la misma fecha y porque el tamaño muestral es igual en ambos sondeos

2P. ¿Cuál es para Ud., la secuencia idónea para la enseñanza de los conceptos involucrados en este problema?

(a) Muestra, población, muestra aleatoria, azar, selección de muestras, tamaño muestral.
(b) Azar, muestra, población, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
(c) Azar, población, muestra, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
(d) Muestra, población, azar, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.

Movilidad de registros: de registro escrito a registro escrito, de contexto a modelo.

1P. Uso del muestreo en la realización de encuestas. Diferencia entre muestra y población. Influencia del método de selección y el tamaño de muestras sobre los datos recolectados y las conclusiones relativas a la población.

CC: 1P (Inferencia)

1P. Si elige (c) considera el azar de la muestra y el tamaño mayor de la misma, el sondeo es más reciente y se pregunta sólo a los votantes, 2 puntos, (2). Si elige (a) considera el azar pero la muestra no es la mayor, solo 1 punto, (1). Las alternativas (b) y (d) obtienen 0 puntos (0), pues (b) no es una muestra al azar, y (d) considera a su vez (b), es decir falta el concepto de aleatoriedad de muestras.

CPC: La pregunta concierne a 2P (Enseñanza –Organización de Tareas Matemáticas Escolares)

Respuestas Esperadas a los ítems:

2P. Todas las alternativas contienen los mismos conceptos, lo que prevalece es la organización de una secuencia idónea para la enseñanza a la que se obliga al profesor a elegir. Si elige (b) considera el azar antes de muestra y población, (2). Tanto (c) como (d) obtienen 1 punto, (1), si elige (c) considera el azar como base pero el orden población y luego muestra no parece idóneo; si elige (d) el orden muestra y luego población, y azar antes de muestra aleatoria, parece idóneo pero es tardía la aparición de lo aleatorio. La alternativa (a) obtiene 0 puntos, pues si bien considera muestra y luego población, trata primero muestra aleatoria que el concepto de aleatoriedad, (0).

Ítem 9

Contexto: Aviso de venta de pantalones. (Cod. MED)

Resumen: El ítem MED adaptado desde TIMSS 2007 para el nivel 8, tiene como objetivo medir el razonamiento y el conocimiento de la media y algunas de sus propiedades. Es un ítem de Estadística Descriptiva.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: “(6to) 17. Cálculo de la media aritmética, mediana y moda, en forma manual… para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan y discusión acerca de la pertinencia de su cálculo según el tipo de datos”.

Movilidad de registros: de registro escrito a registro escrito, de contexto a modelo.

1E. Razonar el valor de verdad de cada aseveración escrita en base a las propiedades de la media. Comprensión relacional del concepto de media.

CC: 1E, 1P, 2P y 3P (estadística descriptiva).

MED: Un vendedor de ropa coloca el siguiente aviso en su negocio: "Pantalones para la venta, diferentes precios, precio promedio de $5000".

1.E Desde el aviso, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) La mayoría de los pantalones costarían entre $ 4000 y $ 6000.
(b) La mitad de los pantalones costaría menos de $ 5000, y la otra mitad costaría más que $ 5000.
(c) Al menos uno de los pantalones costaría $ 5000.
(d) Algunos pantalones costarían menos que $ 5000.

1P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno confunde el cálculo del promedio con el cálculo de la mediana? _______________

2P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que el promedio tiene que corresponder a un dato? _______________

3P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que siempre los datos se distribuyen simétricamente? _______________

1E. Si entiende que un valor promedio no necesariamente corresponde a un dato dado entonces elige (d), (2). Todas las demás alternativas no tienen puntaje (0), si cree que siempre los datos muestran una distribución simétrica puede elegir (a), si confunde el promedio como el valor central mediano puede elegir (b); y si considera que el promedio debe corresponder a un valor de los datos puede elegir erróneamente (c).

1P. Escribe la alternativa (b) que muestra la confusión con la definición de mediana, (2). Sin puntos (0) cualquier otra alternativa.

2P. Escribe la alternativa (c) que evidencia la creencia de que el valor de la media debe corresponder a un dato, (2). Si escribe las alternativas (a) y (c), solo 1 punto (1). Sin puntos (0) cualquier otra alternativa.

3P. Escribe la alternativa (a) que muestra la creencia que la media es el punto medio entre los valores extremos, (2). Sin puntos (0) cualquier otra alternativa.

Ítem 10

Contexto: Número de preguntas por alumnos. (Cod. NOUT)

Resumen: El ítem NOUT muestra frecuencias en una tabla simple horizontal, proviene de un trabajo de Garfield (1992), y pretende examinar los conocimientos de los alumnos sobre las medias, el uso del algoritmo de cálculo, el efecto de los valores atípicos y del cero en el cálculo de la media, así como la importancia del contexto. Es un ítem de Estadística Descriptiva.

Representación: Tabla de frecuencias.

CMO: "(3ro) 21. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas… y formulación de afirmaciones respecto a los datos a los que hacen referencia. (6to) 17. Cálculo de la media aritmética, mediana y moda, … para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan y discusión acerca de la pertinencia de su cálculo según el tipo de datos”.

Movilidad de registros: de registro tabular a registro escrito, de registro tabular a registro numérico, de contexto a modelo y viceversa.

1E. Interpretar tabla con los valores de una variable discreta. Usar del algoritmo de la media, reconocer que los valores atípicos u outlier pueden conservarse según el contexto.

NOUT. Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación:

	Nombres de los estudiantes							
	Juan	Lucía	Roberto	Ana	Pedro	María	Luis	Clara
Número de preguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día.
1E. ¿Cuál de los siguientes métodos usted le recomienda?

(Marcar una de las siguientes respuestas)

(a) Usar el número más común, que es el 2.
(b) Sumar los 8 números y dividir por 8
(c) Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.
(d) Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos alrededor de este problema? (lo que más enfatizaría)

(a) Que estructuren los conocimientos y resuelvan bien los ejercicios
(b) Se centren en la información y organicen redes de conceptos
(c) Activen los conocimientos previos, integren y vean la utilidad
(d) Trabajen en grupos, aprendan a explicar y argumentar entre ellos

CC: 1E (estadística descriptiva).

1E. Dado el contexto, la alternativa (b) muestra el uso apropiado del concepto media, (2). Las alternativas (c) no considera el contexto y evidencia el uso erróneo de la propiedad “La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente en los valores atípicos”, pero ocupa la media como mejor estimador, (1). El distractor (d) muestra que no toma el cero en el cálculo de la media debido a la creencia errónea de elemento neutro en la operación “cálculo de media”, (0). El distractor (a) muestra la confusión entre media y moda y/o la consideración errónea de que la moda es mejor medida de centralidad que la media, (0).

CPC: La pregunta concierne a 1P (Enseñanza-CREA)

Respuestas Esperadas al ítem: (sin puntaje)

1P. El profesor que contesta (a) muestra una concepción conductista La (b) evidencia una concepción con énfasis en los procesos de información. La (c) enfatiza las características del aprendizaje significativo. Si contesta (d) concibe el proceso de aprendizaje con una perspectiva socioconstructivista.

Ítem 11

Contexto: Alumnos pesan un objeto. (Cod. OUT)

Resumen: El ítem OUT originalmente de Liu (1998), pretende evaluar el uso de la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medida; la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media; la confusión entre media y moda; así como la importancia del contexto. Es un ítem de Estadística Descriptiva.

Representación: Datos numéricos (variable continua) en contexto.

CMO: "(6to) 17. Cálculo de la media aritmética, mediana y moda,… para caracterizar información presente en diversos contextos; interpretación de la información que ellas entregan y discusión acerca de la pertinencia de su cálculo según el tipo de datos".

Movilidad de registros: de registro numérico a registro escrito, de contexto a modelo y viceversa.

> **OUT:** Nueve estudiantes pesaron un pequeño objeto con un mismo instrumento calibrado en su clase de Ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:
>
> 6,2 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,23 6,2 6,2
>
> Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto.
>
> **1P. ¿Cuál de los siguientes argumentos esperaría escuchar entre estos alumnos?**
>
> (a) Usar el número que más se repite, que es 6,2.
>
> (b) Usar 6,23 ya que es la medición más precisa.
>
> (c) Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.
>
> (d) Desechar el valor 15,3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.
>
> **2P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos alrededor de este problema?**
>
> (a) Usar correctamente las medidas de tendencia central
>
> (b) Comparar y elegir entre media y moda
>
> (c) Calcular la media usando todos los valores
>
> (d) Considerar el contexto y aplicar concepto de valores atípicos al calcular la media

1P. Este ítem discrimina entre el simple conocimiento algorítmico de cálculo de la media y la comprensión relacional del concepto, incluyendo la importancia del contexto.
Aplicación de la propiedad "La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente en los valores atípicos", y concepto de "media como el mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medición".

CC: 1P (estadística descriptiva).

1P. Si elige (d) evidencia que interpreta los datos numéricos, conoce el algoritmo de cálculo de la media, conoce que la media es sensible a valores extremos, reconocer el efecto de los valores atípicos (outliers) en la media y toma en cuenta el contexto para descartar el valor atípico antes de calcularla, (2). La alternativa (c) evidencia que no considera el efecto de valores atípicos, pero usa la media como mejor estimador aunque obvía la falta de robustez de la media frente a valores atípicos, (1). El distractor (a) muestra la confusión entre media y moda y/o la consideración errónea de que la moda es mejor estimador, ya que la moda es peor estimador de la media en el contexto dado (0). El distractor (b) promueve la idea de precisión en relación al mayor número de cifras decimales, y muestra la confusión de mejor estimación con precisión de una medida específica, (0).

CPC: La pregunta concierne a 2P (Enseñanza-CREM)

Respuestas Esperadas al ítem: (sin puntaje).

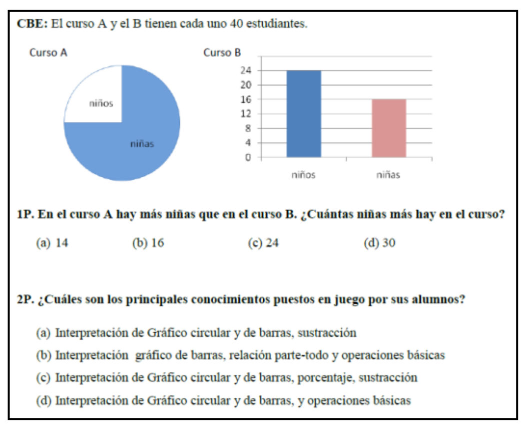
2P. El profesor que contesta (a) muestra una concepción de que su proceso de enseñanza es de tipo procedimental con énfasis en el uso de datos numéricos y cálculos correctos. La (b) evidencia una enseñanza de la estadística con cierta comprensión reflexiva sobre sólo dos medidas de tendencia central. La respuesta (c) enfatiza su enseñanza de la estadística donde lo procedimental es prioritario. Si contesta (d) concibe su proceso de enseñanza con alto nivel de comprensión reflexiva de la media y los valores atípicos dentro de un contexto que le da significado.

Ítem 12

Contexto: Dos cursos con 40 alumnos cada uno. (Cod. CBE)

Resumen: El ítem CBE proviene del TIMSS 2007 para el nivel 4, mide la comprensión gráfica a nivel de extracción de relaciones, incluyendo la representación parte-todo para la comparación y obtención de datos.

Representación: Círculo parte todo y gráfico de barras.



CMO: "(3ro) 21. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples y formulación de afirmaciones respecto a los datos a los que hacen referencia. (4to) 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples verticales…, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia. (6to) 15. Resolución de problemas que impliquen interpretar información desde gráficos…".

Movilidad de registros: de registro gráfico a registro numérico, de modelo a contexto.

1P. Comparar dos gráficos, uno de barras verticales y otro seudo gráfico circular más bien es una representación parte-todo, y extraer información de datos cuantitativos (variable categórica y variable discreta), leer escala. Interpretar área de sector circular con parte del total.

CC: 1P (estadística descriptiva).

1P. La alternativa (a) muestra la correcta lectura de la escala del gráfico de barras, la correcta determinación de las partes y su relación con el todo, y el cálculo comparativo de los datos cuantitativos extraídos de las representaciones, (2). La alternativa (d) muestra la correcta determinación de las partes y su relación con el todo en términos numéricos pero no realiza el cálculo comparativo, (1). El distractor (b) y (c) muestran sólo la lectura del gráfico de barras pero no realiza cálculo comparativo, (0).

CPC: La pregunta concierne a 2P (CRAC- Conocimientos Adquiridos)

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. La alternativa (b) considera las operaciones básicas (adición y sustracción), la lectura de gráfico de barra, y la diferenciación entre gráfico circular y representación parte-todo, (2). La alternativa (d) toma en cuenta las operaciones básicas (adición y sustracción) pero no diferencia entre gráfico circular y representación parte-todo, obtiene 1 punto (1). Las alternativas (a) y (c) aunque puede usarse la adición considera sólo la sustracción, y la no diferenciación entre gráfico circular y parte-todo, (0).

Ítem 13

Contexto: Tres monedas (Cod. PMO)

Resumen: Este es un conocido ítem de Fischbein (1997) que mide el sesgo de “efecto del tamaño muestral” que resulta de la indebida interpretación de la ley de los grandes números, según la convergencia de los valores de los estadísticos a los parámetros poblacionales en una serie corta de ensayos, creyendo en una "Ley de los pequeños números", por la que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Es un ítem de Probabilidad que integra conceptos de Inferencia.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: “(5to). 21. Descripción de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas y argumentación acerca de la posibilidad de ocurrencia de estos. (6to). 18.

Repetición de un experimento aleatorio simple… y estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento, comprendiendo que a mayor número de lanzamientos mejor es la estimación. (7mo) 19. Caracterización de la representatividad de una muestra, a partir del tamaño …. 20. Discusión acerca de la manera en que la naturaleza de la muestra, el método de selección y el tamaño de ella afectan los datos recolectados y las conclusiones relativas a una población (8vo) 20. Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios… 21. Identificación del conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y de los eventos o sucesos como subconjuntos de aquél, uso del principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos. (II). 20. Exploración de la Ley de los Grandes Números, a partir de la repetición de experimentos aleatorios,… y su aplicación a la asignación de probabilidades".

Movilidad de registros: de registro escrito a registro escrito, de contexto a modelo.

1P. El ítem toma en cuenta el efecto del aumento de tamaño de la muestra, cuando la probabilidad empírica se aproxima a la teórica, conocida como la ley de los grandes números.

PMO. Complete la siguiente afirmación,

1P. "La probabilidad de obtener al menos dos veces cara al lanzar tres monedas es …………….. la probabilidad de que salga cara por lo menos 200 de cada 300 veces."

(a) Menor que (b) Igual a (c) Mayor que (d) No sé

2P. La situación anterior se le presentó a los alumnos de un séptimo básico. **Para explicar el contenido asociado a este problema, Ud. se enfocaría en:**

(a) el Triángulo de Pascal
(b) las proporciones
(c) la Ley de los Grandes Números
(d) el diagrama de árbol

CC: 1P (probabilidad).

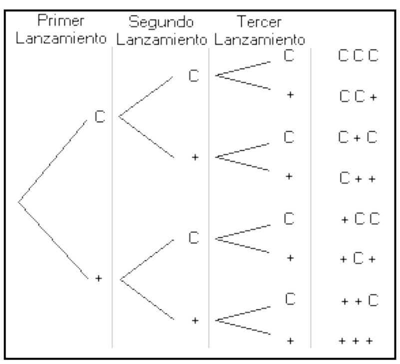
1P. El experimento de lanzar tres monedas tiene asociado un espacio muestral de 8 sucesos diferentes y equiprobables (E= {CCC, CCS, CSC, SCC, SSC, SCS, CSS, SSS} y P(1 cara)= 3/8, P(1 sello)= 3/8, P(3 caras)=1/8 y P(3 sellos)= 1/8). La probabilidad de obtener al menos 2 caras es 0,5; P(al menos 2 caras)= P(2 caras)+P(3 caras)=3/8 + 1/8=4/8=1/2. Este problema puede realizarse sin el cálculo del espacio muestral descrito, sino con el razonamiento lógico siguiente: La probabilidad de obtener 200 caras de un total de 300 lanzamientos es muy pequeña comparada con la probabilidad mucho mayor de obtener 2 caras al lanzar 3 monedas.

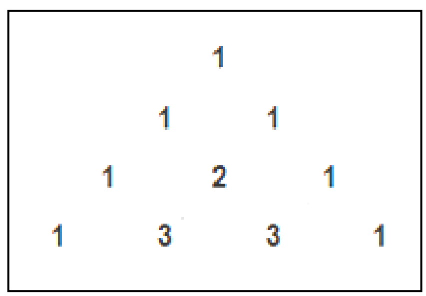
Por lo tanto la alternativa (c) muestra la alternativa correcta, que la probabilidad de obtener al menos dos caras al lanzar tres monedas es mayor que la probabilidad de obtener cara por lo menos 200 de cada 300 veces, (2). El distractor (b) responde a un error conocido como “efecto del tamaño muestral”, (no es importante el tamaño de la muestra) y lleva aparejada una evaluación intuitiva basada en el uso inadecuado del esquema de las proporciones (200/300=2/3) y no consideran la magnitud de las muestras, obtiene 0 puntos, (0). Si responde erróneamente (a) o (d) obtiene 0 puntos, (0).

CPC: La pregunta 2P concierne a Representaciones concretizadoras

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. La alternativa correcta es (c), la idea de la Ley de los grandes números y el aumento del tamaño muestral, (2). Las alternativas (a) y (d), los modelos de diagrama de árbol y el triángulo de Pascal, ver imágenes, si bien se aplican para una comprensión intuitiva de la convergencia y frecuencia teórica, no son apropiados pero pueden ocuparse en el lanzamiento de las 3 monedas, (1). El modelo proporcional no es aplicable, alternativa (b), de hecho induce al error de no tomar en cuenta el tamaño de la muestra, (0).





Ítem 14

Contexto: Nacimientos (Cod. NAC)

Resumen: El ítem NAC adoptado de Fischbein (1997) proveniente de una famosa tarea de Kahneman y Tversky (1972) que mide el sesgo de “efecto del tamaño muestral” o de “representatividad” que resulta de la indebida interpretación de que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Es un ítem de Probabilidad que integra conceptos de Inferencia.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: "(6to) 18. Repetición de un experimento aleatorio simple en contextos lúdicos y estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de veces en que ocurrió dicho evento y el número de repeticiones del experimento, comprendiendo que a mayor número de lanzamientos mejor es la estimación. (7mo) 19. Caracterización de la representatividad de una muestra, a partir del tamaño... 20. Discusión acerca de la manera en que la naturaleza de la muestra, el método de selección y el tamaño de ella afectan los datos recolectados y las conclusiones relativas a una población".

Movilidad de registros: de registro escrito a registro numérico, de contexto a modelo.

1P. Este ítem detecta el uso del concepto de variabilidad en muestras pequeñas. Es un caso especial de la heurística de la representatividad referida a la ley de los pequeños números, pues la gente tiende a juzgar las muestras pequeñas como igual representativas de la población que las muestras grandes.

NAC. La probabilidad de que un recién nacido sea niño es igual a la probabilidad de sea niña. En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos. El hospital A registra 50 nacimientos por día, el Hospital B registra un promedio de 10 nacimientos por día. En un día en particular,

1P. ¿Cuál hospital tiene mayor probabilidad de registrar un 80% o más de nacimientos de niñas?

(a) Hospital A (con 50 nacimientos al día)

(b) Hospital B (con 10 nacimientos al día)

(c) Los dos hospitales tienen la misma probabilidad de registrar dicho evento

(d) No lo sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(a) Variabilidad en muestras pequeñas

(b) Equiprobabilidad

(c) Ley de los Grandes Números

(d) No sé

CC: 1P (probabilidad).

1P. La alternativa (b) asume que el Hospital con menos nacimientos tiene más probabilidades de tener un 80% de nacimientos de niñas, (2). El distractor (a) considera la idea de representatividad en cuanto hay mayor proporción en muestras más grandes, (0). El distractor (c) considera la creencia en la estabilidad de las frecuencias, incluso en pequeñas muestras, y sugiere la "ley de los pequeños números", incluyendo el "efecto del tamaño muestral", (en el sentido de que no es importante el tamaño de la muestra), 0 puntos, (0). La alternativa (d) o no contesta, (0).

CPC: La pregunta concierne a 2P (CRAC-Conocimientos Adquiridos)

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. La alternativa correcta es (c), es la idea de la Ley de los grandes números y el concepto intrínseco del aumento del tamaño muestral, (2). Las alternativas (a) y (b), aplica conocimientos necesarios involucrados, (1). No sabe o no contesta, obtiene 0 puntos, (0).

Ítem 15

Contexto: Lotería (Cod. PLO)

Resumen: El ítem PLO adoptado desde Fischbein (1997) mide el sesgo de representatividad relativo a probabilidad, que es la creencia de la falsa idea de la de las personas que tienden a estimar la probabilidad de un acontecimiento en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Es un ítem referido a Probabilidades.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: "(5to) 21. Descripción de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas y argumentación acerca de la posibilidad de ocurrencia de éstos. (8vo) 20. Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios…22. Asignación en forma teórica de la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio, con un número finito de resultados posibles y equiprobables, usando el modelo de Laplace".

Movilidad de registros: de registro escrito a registro numérico, de contexto a modelo.

PLO. En un juego de lotería, se tienen que elegir 6 números entre el 1 y el 40, ambos inclusive. Se gana, si acierta a todos los números. Verónica ha elegido 1, 2, 3, 4, 5, 6. Rosa ha elegido los números 39, 1, 17, 33, 8, 27.

1P. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

(a) Verónica tiene una mayor posibilidad de ganar.

(b) Rosa tiene una mayor posibilidad de ganar.

(c) Verónica y Rosa tienen la misma posibilidad de ganar.

(d) No sé

2P. ¿Cuáles alternativas muestran la concepción errónea de sus alumnos sobre secuencias aleatorias?

(a) a y b (b) a y c (c) b y c (d) No sé

1P. El ítem busca intuir correctamente la probabilidad al identificar sucesos independientes, (cada número se elige en forma independiente de los demás 40 números) por lo que ambas tienen la misma posibilidad de ganar, lo que lleva implícito el concepto de azar construido. El sesgo que lleva a creer que no son igualmente probables se conoce como "falsa idea de representatividad".

Una solución para seis números ganadores es multiplicar todas las posibilidades de números que pueden salir, esto es 40*39*38*…*2*1=40! Elegir 6 números genera 6 elecciones para el primero, 5 elecciones para el segundo y así… 40!/6!

es el total de diferentes grupos de 6 números. Si todos los números son igualmente probables entonces la probabilidad de ganar es 1/(40!/6!), en ambos casos.

CC: 1P (probabilidad).

1P. La alternativa (c) evidencia el uso del concepto de independencia de sucesos, (2). El distractor (b) presenta el sesgo de representatividad, (0). Las alternativas (a) y (d), o si no contesta no tienen puntaje, (0).

CPC: La pregunta concierne a 2P (CRAC-Errores).

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. La alternativa (a) muestra conocimiento del sesgo de representatividad en el razonamiento probabilístico y/o no tomar en cuenta la independencia de sucesos, (2). No tienen puntaje las alternativas (b) y (c) pues se mezclan con la alternativa correcta, (0). No responde o contesta (d), (0).

Ítem 16

Contexto: Dados equilibrados (Cod. PDA)

Resumen: El ítem PDA proviene de Fischbein (1997) y explora en la comprensión de los sucesos simples y compuestos, midiendo el sesgo de equiprobabilidad con el cual los sujetos consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables. Desde el punto de vista de la enseñanza este sesgo supondría una extensión indebida de la regla de Laplace y la no discriminación de las situaciones en las que es o no es aplicable el principio de indiferencia. Es un ítem de Probabilidad.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: “8vo) 20. Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios…21. Identificación del conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y de los eventos o sucesos como subconjuntos de aquél, uso del principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos. 22. Asignación en forma teórica de la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio, con un número finito de resultados posibles y equiprobables, usando el modelo de Laplace”.

Movilidad de registros: de registro escrito a registro numérico, de contexto a modelo.

PDA. Supongamos que lanzas simultáneamente dos dados equilibrados.

1P. ¿Cuál de las siguientes situaciones tiene mayor posibilidad de ocurrir?

(a) Obtener el par 5-6

(b) Obtener el par 6-6

(c) Ambas tienen la misma posibilidad

(d) No sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(a) Construcción de tabla de frecuencias y/o diagrama de árbol de espacio muestral

(b) Concepto de suceso y espacio muestral

(c) Concepto de equiprobabilidad y no equiprobabilidad, y de espacio muestral

(d) Concepto de experimento aleatorio y espacio muestral

1P. Obtener cardinalidad del espacio muestral para el lanzamiento de dos dados lanzados simultáneamente, la cardinalidad de ese espacio es de 36 elementos, el par 6-6 esta solo una vez, en cambio el par 6-5 y 5-6 esta dos veces. Diferenciar suceso (5,6) del suceso (6,5) o viceversa. Identificar sucesos, determinar espacio muestral y eventos relacionados al experimento aleatorio. Asignar probabilidad de ocurrencia de un suceso según modelo de Laplace. Posible intuición errónea de que los sucesos aleatorios son por naturaleza equiprobables, conocido como Sesgo de Equiprobabilidad. Obtener que el par 6-6 tiene probabilidad 1/36 y el par 5-6 tiene probabilidad 2/36, tienen distintas probabilidades, por lo tanto son sucesos no equiprobables.

CC: 1P (probabilidad).

1P. La alternativa (a) evidencia la probabilidad 2/36 ó 1/18 que es mayor, (2). La alternativa (b) es incorrecta pues esa probabilidad es de 1/16, por lo tanto es menor, (0). La alternativa (c) muestra el error principal en cuanto evidencia el sesgo de Equiprobabilidad, (0). Si no responde o elige (d) tiene 0 puntos, (0).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

CPC: La pregunta concierne a 2P (CRAC-Conocimientos Adquiridos)

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. Los principales conocimientos adquiridos por los alumnos los representan los conceptos de Equiprobabilidad y no Equiprobabilidad, y espacio muestral de (c), 2. Las alternativas (b) y (d) presentan conceptos importantes de probabilidad pero no toma en cuenta la no Equiprobabilidad, (1). Si no responde o elige (a), obtiene 0 puntos, (0).

Ítem 17

Contexto: Predicción de terremotos (Cod. PTE)

Resumen. El ítem PTE proviene de PISA 2003 expone una situación científica para llevar a la reflexión en torno al concepto de probabilidad, y contestar desde las concepciones intuitivas.

Representación: Texto de situación en contexto.

CMO: ”(5to) 21. Descripción de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas y argumentación acerca de la posibilidad de ocurrencia de estos. (7mo) 21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio…”.

Movilidad de registros: de registro escrito a registro numérico, de contexto a modelo.

1P. El ítem exige reflexión y comprensión para conjeturar sobre una predicción.

CC: 1P (probabilidad).

1P. La alternativa (c) establece que dada la información existe la posibilidad que ocurra un suceso no toma en cuenta la probabilidad como un valor, y no presenta una certeza absoluta, 2 puntos, (2). La alternativas (a) y (b) presentan cálculos erróneos y términos de certeza en un escenario incierto, 0 puntos, (0). El distractor (d) evidencia un razonamiento centrado en intuiciones y/o creencias personales y ausencia de predicción en situaciones de incerteza, (0).

PTE: En un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo dijo: “En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de XYZ es dos tercios”.

1P. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

(a) (2/3) x 20 = 13,3; por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de XYZ.

(b) 2/3 es más que 1/3, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años.

(c) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

(d) No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

2P. Ud. considera que esta pregunta permite,

(a) Reflexionar y hacer un juicio crítico sobre el significado real de una predicción

(b) Aplicar el modelo de Laplace para responder a una situación probabilística

(c) Reafirmar la incerteza, y la inaplicabilidad de la probabilidad en ciertos casos

(d) Justificar la afirmación, haciendo uso de la matemática

CPC: La pregunta concierne a 2P (Enseñanza-CREM)

Respuestas Esperadas al ítem:

2P. El profesor que contesta (a) muestra una concepción de que su proceso de enseñanza es de tipo reflexivo en la interpretación de situaciones de incerteza. La (b) y (d) evidencian una enseñanza de la estadística procedimental donde los datos numéricos y cálculos son centrales para la búsqueda de evidencias. Si contesta (c) al parecer concibe su enseñanza sin base científica pues no usa las predicciones en la incerteza.

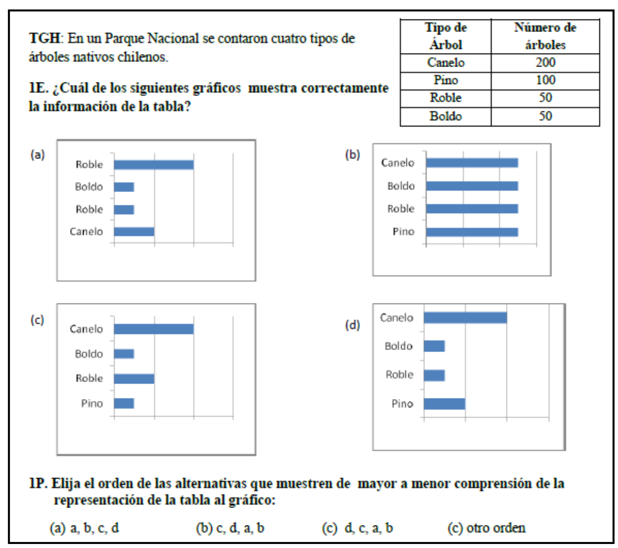
Ítem 18

Contexto: Árboles chilenos (Cod. TGH)

Resumen: El ítem TGH proviene de TIMSS 2007 de nivel 4to, y fue modificado para movilizar la lectura desde una tabla de frecuencia a un gráfico de barras horizontal con cambio de orden de escala de la variable nominal y sin mostrar en el eje horizontal los valores de la variable numérica. Es un ítem de Estadística Descriptiva.

Representación: tabla simple de datos sin agrupar y gráfico de barras horizontales sin eje de abscisas explícito.

CMO: “(4to) 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas y gráficos de barras simples verticales y horizontales, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia. (7mo) 17. Análisis de ejemplos de diferentes tipos de tablas y gráficos, argumentando en cada caso… la información a comunicar y el tipo de datos involucrado”.


TGH: En un Parque Nacional se contaron cuatro tipos de árboles nativos chilenos.

1E. ¿Cuál de los siguientes gráficos muestra correctamente la información de la tabla?

Tipo de Árbol	Número de árboles
Canelo	200
Pino	100
Roble	50
Boldo	50

1P. Elija el orden de las alternativas que muestren de mayor a menor comprensión de la representación de la tabla al gráfico:

(a) a, b, c, d (b) c, d, a, b (c) d, c, a, b (c) otro orden

Movilidad de registros: de registro tabular a registro gráfico, de contexto a modelo.

1E. Leer desde tabla simple. Leer gráfico de barras horizontales y detectar diferente orden de categoría en el eje vertical. Comparar información de tabla con gráfico de barras horizontales. Transformar dato cuantitativo a longitud de barra. Interpretar longitud de barra con dato cuantitativo de cada categoría de la variable. Conjeturar desde representación de gráfico de barras estableciendo correspondencia entre uno de los gráficos y la tabla.

CC: 1E (estadística descriptiva).

1E. La alternativa (d) corresponde a la información que presenta la tabla, (2). Los distractores (b) y (c) presentan gráficos con las diferentes longitudes de las barras requeridas pero no se relacionan con el nombre de la categoría dado en la tabla, (1). La alternativa (a) muestra un gráfico sin relación con los datos, con todas las barras de una misma longitud, (0).

CPC: La pregunta concierne a 1P (CRAC-Dificultades)

Respuestas Esperadas al ítem:

1P. La alternativa (c) organiza las posibles dificultades de sus alumnos, desde comprensión mayor a menor, pues el gráfico correcto es el primero y el gráfico de barras iguales es el último, (2). La alternativa (b) muestra conocimiento de la mayor falta de comprensión el gráfico de barras iguales pero desconoce el gráfico correcto en el primer lugar, (1). El distractor (a) muestra primero el gráfico de quien sólo leyó el nombre de la categoría con el eje que muestra el gráfico, pero no con las correspondencia del nombre con la barra, y en último lugar coloca el gráfico correcto, (0). Sin puntaje la alternativa (c) o si no contesta, (0).

Ítem 19

Contexto: Robles plantados (Cod. TGV)

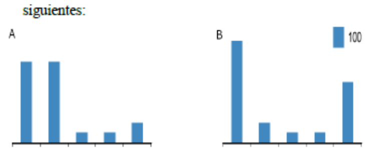
Resumen: El ítem TGV proviene inicialmente de SERCE 2009, y fue modificado para movilizar la lectura desde una tabla de datos agrupados a un gráfico de barras vertical que no muestra en los ejes los valores de las variables pero presenta un ícono de altura proporcional. Es un ítem de Estadística Descriptiva.

Representación: tabla de datos agrupados y gráfico de barras verticales sin ejes explícitos.

CMO: "(7mo) 17. Análisis de ejemplos de diferentes tipos de tablas y gráficos, argumentando en cada caso… la información a comunicar y el tipo de datos involucrado. (8vo) 16. Resolución de problemas en los cuales es necesario interpretar información a partir de tablas de frecuencia con datos agrupados…"

Cantidad de Robles	*Cantidad de Parques*
1	500
2	100
3	50
4	50
5 ó más	300

TGV: En 1000 Parques Nacionales se contaron la cantidad de robles plantados en cada uno. Los resultados fueron los siguientes:



1P. ¿Cuál es el gráfico que corresponde a la tabla?

(a) el gráfico A (b) el gráfico B (c) el gráfico C (d) otro gráfico

2P. El tipo de variable es cuantitativa y __________,

(a)discreta (b) continua (c) dicotómica (d) ordinal

3P. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

Movilidad de registros: de registro tabular a registro gráfico, de contexto a modelo y viceversa.

1P. Leer datos agrupados de una tabla. Asociar un dato cuantitativo con la altura de barra. Interpretar el icono. Deducir el gráfico.

CC: 1P (estadística descriptiva).

1P. La alternativa (b) evidencia una correcta lectura de tabla y asociación con las alturas de barras, con o sin uso de icono, (2). Las alternativa (a) y (c) no corresponden a los valores de la tabla, (0). Sin contestar o (d), tienen 0 puntos, (0).

2P. La alternativa (a) es la correcta pues el tipo de variable es cuantitativa y discreta, (2). Si elige (b) tiene confusión entre variable discreta y continua pero las identifica como cuantitativas, (1). Si no contesta o responde las alternativas (c) o (d) que se asocian a variables cualitativas, 0 puntos, (0).

CPC: La pregunta concierne a 3P (CRAC- Conocimientos Adquiridos)

Respuestas Esperadas al ítem:

3P. Cualquier opción es válida (a, b, c, d) si ésta coincide con la respuesta a la misma pregunta tipo 2P entregada por sus alumnos, tiene 2 puntos (2). La opción (a) equivale a mayor igual que el 65%, la opción (b) equivale al intervalo porcentual [50, 65[, la opción (c) equivale a]35, 50[, y la opción (d) equivale a menor igual 35%. Sólo 1 punto (1) si la diferencia es de 1 intervalo. Sin puntos si la diferencia es de 2 intervalos, (0).

Ítem 20

Contexto: Nueve Mascotas (Cod. MOD)

Resumen: El item Mod proviene de Sorto (2004) y mide el conocimiento para generar datos y medidas de centro y rango para datos categóricos, y además mide la habilidad de los profesores de identificar errores en las respuestas de los alumnos. Fue levemente modificado en los tipos de mascotas. Es un ítem sólo de Estadística Descriptiva.

Representación: tabla de frecuencia de datos categóricos

CMO: ”(4to) 15. Producción y comunicación de información a partir de datos organizados en tablas… Discusión sobre el tipo de datos que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras simples. (7mo). 17. Análisis de ejemplos de diferentes tipos de tablas y gráficos, argumentando en cada caso acerca de sus ventajas y desventajas en relación con las variables representadas, la relación de dependencia entre estas variables, la información a comunicar y el tipo de datos involucrado. 18. Establecimiento y aplicación de criterios para la selección del tipo de tablas o gráficos a emplear para organizar y comunicar información obtenida desde diversas fuentes…”

Movilidad de registros: de registro escrito a registro tabular, de contexto a modelo.

2P. La respuesta dada por el alumno es incorrecta, pues para datos categóricos como tipo de mascotas no se puede obtener la mediana ni el rango pues la variable es nominal, por lo que solo corresponde determinar la moda como medida de tendencia central.

CC: 1P (estadística descriptiva).

MOD: Los estudiantes de un curso del segundo ciclo básico registraron los datos acerca de sus mascotas en la siguiente tabla.

Los estudiantes comentaban acerca de los datos y uno de ellos dijo:

"La moda es perro, la mediana es pato, y el rango va de 1 a 7"

1P. Si usted piensa que el alumno está en lo correcto, explique por qué.

....

2P. Si usted piensa que el estudiante está en un error, identifique el error (s).

....

Mascotas	Frecuencia
pájaro	2
gato	4
tortuga	2
perro	7
pato	1
pez	2
ardilla	1
puercoespín	3
conejo	3

3P. Si Ud. detecta errores en la comprensión de esta pregunta por parte de sus alumnos, Ud. enfocaría el trabajo principalmente en:

(a) Concepto de medidas de tendencia central
(b) Concepto tablas de frecuencia
(c) Medidas de tendencia central y rango
(d) Concepto de variable cualitativa

1P. Si sólo se refiere al valor modal como 7, (2). Si indica que no se puede calcular la mediana y el rango, (1). Si determina un valor para la mediana o un rango desde las frecuencias, o no contesta, o declara la moda como no correcta, no obtiene puntaje, (0).

2P. Si se refiere tanto a la mediana y rango como errores, (2). Si se refiere ó solo a la mediana o solo al rango como error, (1). Si declara que la moda es errónea, (0).

CPC: La pregunta concierne a 3P (Enseñanza-OTME)

Respuestas Esperadas al ítem:

3P. La alternativa adecuada para secuenciar el trabajo dado los errores de los alumnos, es la alternativa (d) que enfoca la tarea en el concepto de variable cualitativa, (2). Las alternativas (a) y (c) se refieren a las medidas de tendencia central y/o rango, que podrían dilucidar el uso según el tipo de datos, (1). Si no contesta o se enfoca en las tablas de frecuencia, obtiene 0 puntos, (0).

Tabla 16: Rúbrica para un perfil de profesor con CPC referido al CRAC de los ítems abiertos: 1 “Dulces” (2P, 4P, 5P Y 6P) y 2 “Tom” (3P, 5P, 6P y 7P).

Nivel 2 (Excelente)	Nivel 1 (Mediano)	Nivel 0 (Insuficiente)
• Comprende las dificultades de los estudiantes y las razones de las dificultades de los estudiantes • Es capaz de hacer preguntas adecuadas y significativas a fin de entender el proceso de pensamiento del estudiante. • Tiene la capacidad de crear soluciones para superar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. • Es capaz de crear criterios adecuados para evaluar y evalúa de acuerdo a esos criterios.	• Comprende las dificultades y las razones de las dificultades de los estudiantes. • Presenta carencia de preguntas adecuadas y significativas para comprender el proceso de pensamiento del estudiante. • Muestra cierta dificultad para crear soluciones a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. • Muestra cierta dificultad para crear criterios adecuados para evaluar y evaluar de acuerdo a estos criterios.	• Tiene dificultad para comprender tanto las dificultades como las razones de las dificultades de los estudiantes. • No es capaz de comprender el proceso de pensamiento de los estudiantes con preguntas • No evidencia la capacidad de crear soluciones a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. • Tiene dificultad para crear criterios apropiados para evaluar y no evalúa de acuerdo a esos criterios.

Con puntajes de 8 a 6 puntos en las cuatro preguntas, el nivel CPC referido al CRAC es Excelente; si obtiene entre 5 a 3 puntos el nivel es mediano; y si obtiene menos de 3 su nivel es insuficiente.

6.7 Resultados de la Validación de Contenido

Como se señalaba anteriormente, la validez de contenido típicamente involucra el juicio de expertos que valora la adecuación de los ítems de la prueba al área de conocimientos o desempeños que se propone medir. En el caso de este instrumento, el criterio determinado y previamente establecido es el conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido de profesores de Chile que enseñan Estadística en el ciclo básico con el ajuste curricular.

Las categorizaciones de los ítems fueron revisadas dos veces por la autora del trabajo en diferentes lapsos de tiempo para verificar la presencia de la categoría establecida, procediéndose a volver a establecer la categoría en los escasos desacuerdos con la categorización original. Este procedimiento asegura una adecuada fiabilidad en el proceso de codificación de los datos a partir de las categorías definidas.

Como características académicas generales de los ocho jueces hispanohablantes, destacan su nivel de experticia en el área de la Didáctica de la Matemática. Todos poseen estudios de posgrado, cuatro son doctores, dos son candidatos a doctores y dos tienen el grado de magister en Didáctica. Actualmente cuatro de los jueces trabajan en Chile, dos en España, uno en México y otro en EE.UU. Se desarrollan en las siguientes instituciones: Universidad Católica de Valparaíso, Universidad de la Santísima Concepción, Universidad de Santiago, Universidad de Granada, Universidad de Cádiz, CINVESTAV y Universidad de Texas. Las valoraciones de los jueces fueron recibidas en los meses de mayo, agosto y septiembre del año 2010.

6.7.1 Propuestas de los Jueces

La tabulación de todas las valoraciones de los ocho jueces resultó una matriz de 11x160, ver tabla 17. Posteriormente se excluyó la categoría de Medios Didácticos debido a que no hubo acuerdo en qué ítems evaluaban su presencia y se categorizó sólo en dos dimensiones, la Enseñanza y el CRAC. Al parecer los ítems referidos a Medio Didáctico requerían que a través de una imagen se mostrará cómo el esquema o las ilustraciones o la figura se utilizan como representación concretizadora del profesor en el aula, (ver propuesta futura de dos ítems para Medio Didáctico en Anexo 8).

Tabla 17: Matriz de valoraciones de los ocho jueces respecto a los aspectos del CPC del instrumento CPC-DA de 20 ítems nombrados por contexto.

ASPECTOS PCK	Itemes	Dulces								Tom								Prestamos de libros								Perros y gatos								Ruleta gira 50							
	Jueces	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**
CC	*Conocimiento del Contenido*				1p		1p	1p	1p	1p-2p	1p	1p-2p	2p	1p	1p-2p	1p-3p	2p			2p				2p																	1p
CURR	**Conocimiento del currículo**	3p	1p		3p	3p					2p		4p					3p	3p		3p	3p	3p	3p	3p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p		1p						
OTME	**Organización tareas escolares**	**3p**	3p	3p	4p-6p		3p	3p	3p	4p	4p	4p	5p-7p	4p	4p	4p	4p																								
CREM	**Concepciones Estadística**	1p		1p		1p			6p	2p	1p		1p	2p			1p																	1p		1p		1p	1p	1p	
CREA	**Concepciones Teoría del Aprendizaje**		4p-6p		4p-6p						5p-7p		4p-6p							3p																	1p				
ADQU	**Conocimientos Adquiridos**		2p		2p				5p		3p		3p				7p	1p		1p	1p	1p	1p	1p	1p	2p		2p	2p	2p	2p	2p	2p								
DIFI	**Dificultades de los alumnos**																		1p								2p														
ERRO	**Errores de los alumnos**	2p			2p	2p	2p	2p	4p	3p			3p	3p	3p	3p	5p									3p	3p	3p	3p	3p	3p		3p								
ESTG	**Estrategias usuales de los alumnos**	4p-6p	**4p-6p**	2p					2p	5p-7p	**5p-7p**	3p					6p	2p	2p		2p	2p	2p		2p																
MEDI	**Medios Didácticos**										5p-7p		2p																												
DIES	**Diseño de Escenario**			4p-6p		4p-6p	4p-6p	4p-6p				5p-7p		5p-7p	5p-7p	5p-7p																									

Ruleta giran inventan								Muestras iguales olimpiadas								Sondeo eleccion								Pantalon aviso venta								Alumnos hablan							
J1	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**
	1p-3p							1p	1p	1p-2p	1p		2p	1p	2p	1p	1p	1p	1p			1p		1p-3p		1p	1p		1p-3p	1p-3p	1p								1p
	1p																																1p						
								2p			2p	2p		2p		2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p																
1p	1p	1p		1p	1p	1p	1p		1p		1p	1p	1p				1p		1p	1p	1p		1p				1p					1p	1p	1p		1p	1p	1p	
			1p																																				
									2p																1p-3p	2p-3p													
															1p										**1p-3p**			1p-3p			3p								
																									1p-3p		2p-3p				2p								
							1p																																
			1p																																1p				

Alumnos pesan								Curso A B 40 niños								Tres monedas								Nacimiento hospital								Lotería							
J1	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**
								1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p-2p	1p	1p	1p	1p	1p		1p	1p		1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p
	1p										2p						2p		2p		2p				2p		2p												
										2p																													
1p	1p	1P		1p	1p	1p			1p-2p								1p	2p		2p					1p						1p		1p						2p
								2p	2p			2p	2p		2p									2p		2p	2p	2p	2p	2p	2p		2p						
																							2p																
																																2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	
							1p																																
											2p					2p																							
			1p																																				

Dados								Terremoto								Árboles chilenos TGH								Árboles chilenos TGV								Mascotas							
J1	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**J5**	**J6**	**J7**	**J8**
1p	1p	1p	1p	1p	1p	1p-2p	1p	1p	1p	1p		1p	1p	1p	1p		1p	1p		1p	1p			1p-2p	1p-2p	1p	2p	1p-2p	1p	1p-2p		1p			3p	1p	1p	1p-3p	
	2p		2p								2p																												
	1p							2p	1p	2p	1p		2p	2p	2p		1p								1p-2p							3p	3p	3p					1p
												2p																											
2p	2p	2p	2p	2p	2p		2p																									1p-2p	**1p-2p**	1p-2p		2p	3p		
																1p			1p																				
																						1p										2p	1p-2p		2p	2p	2p		2p
																											1p												
									2p		2p																												3p

El análisis de la valoración de los jueces reconoció claramente que los ítems miden CPC, diferenciándose tres tipos de subítems, *puros* (una dimensión y un sólo indicador), *compuestos* (una dimensión y distintos indicadores) y los *integrales* (dos o tres dimensiones y varios indicadores). Las preguntas tipo puras textualmente mostraban el indicador, es decir la concordancia de jueces coincide con que el texto del ítem explicitaba en su redacción el indicador de la dimensión.

Respecto a los subítems de tipo compuestos e integrales, creemos que el reconocimiento de variedad de indicadores para una misma dimensión obedece tanto a la complejidad de la tarea que hemos emprendido, medir con mayor precisión el CPC, como a la epistemología de cada juez, pues las preguntas tipo compuestas no precisaban textualmente el indicador, ya que éste se pretendía implícito.

De los ocho jueces que evaluaron el instrumento tres de ellos dieron sugerencias de redacción en ciertos ítems, se procedió a mejorar algunas redacciones si las recomendaciones concordaban con el presente estudio. Un magister en Estadística y que está finalizando sus estudios de doctorado de Educación en Japón revisó todos los ítems, precisó la redacción y sus alternativas.

Desde un total de 20 preguntas que comprenden 47 subítems, 7 subítems se categorizaron como CC y 41 subítems de CPC. Dieciséis de los subítems del CPC corresponden a la dimensión Enseñanza (3 puros, 7 compuestos y 6 integrales); quince subítems para CRAC (3 puros, 8 compuestos y 4 integrales). Ocho de los subítems del CPC correspondientes a integrales son de tipo abierto, y se espera que para este estudio las respuestas de tipo abierto de los profesores contribuyan a dar más conocimiento del contenido puesto en acción en el proceso de enseñanza.

El resumen de la valoración de los jueces del Instrumento CPC-DA se muestra en la tabla 18. Para cada uno de los 19 ítems finales, se indica el subítem y la dimensión del CPC, entre paréntesis la frecuencia de los jueces, y entre corchetes la especificidad de la frecuencia de los jueces según indicador de la dimensión.

Tabla 18: Valoración de jueces del Instrumento CPC-DA

Ítem – Cód.	*Puros*	*Compuestos*	*Integrales*
Dulces DUL		1P ENS (4) [1 curr, 3 crem] + 4 CC 2P CRAC (9) [2 adq, 5 err, 2 est] 3P ENS (9) [3 curr, 6 otme]	4P ENS (7) [1 otme, 2 crea, 4 dies] + CRAC (3) [1 err, 2 est] 5P ENS (7) [1 otme, 2 crea, 4 dies] + CRAC (3) [1 adq, 2 est] 6P ENS (8) [1 otme, 2 crea, 1 crem, 4 dies] + CRAC (2) [2 est]
Tom PTM	1P ENS (3) [3 crem] + 6 CC	2P ENS (3) [1 curr, 2 crem] + 6 CC 3P CRAC (8) [2 adq, 5 err, 1 est]+ 1 CC 4P CRAC (9) [1 curr, 7 otme, 1 crea]	5P ENS (6) [1 otme, 1 crea, 4 dies] + CRAC (3) [1 err, 2 est] 6P ENS (7) [1 otme, 2 crea, 4 dies] + CRAC (3 [3 est] 7P ENS (5) [1 otme, 1 crea, 3 dies] + CRAC (3) [1 adq, 2 est]
Libros LBE	2P CRAC(6) [est]+ 2 CC	1P CRAC (8) [7 adq, 1 dif] 3P ENS (8) [7 curr, 1 crea]	
Mascotas TDE	1P ENS (8) [curr] 3P CRAC (7) [err]	2P CRAC (8) [7 adq, 1 dif]	
Ruleta Gira RRE		1P ENS (7) [1 curr, 5 crem, 1 crea] + 1 CC	
Ruleta Inventan RRCP		1P ENS (10) [1 curr, 7 crem, 1 crea, 1 dies]+ 1 CC	

Muestras OLI			1P ENS (4) [4 crem] + CRAC (1) [1 dif] + 5 CC 2P ENS (4) [4 otme]+ CRAC (1) [1 adq] + 3 CC
Sondeo MUE	2P ENS (8) [otme]	1P ENS (5) [5 crem] + 5 CC	
Pantalón aviso MED		1P CRAC (4) [1 adq, 2 dif, 1 err] + 6 CC 3P CRAC (7) [2 adq, 3 dif, 2 err] + 3 CC	2P CRAC (7) [2 adq, 2 dif, 3 err]+ 3 CC
Alumnos hablan NOUT		1P ENS (8) [6 crem, 1 curr, 1 dies]	
Alumnos pesan OUT			1P ENS (7) [1 curr, 5 crem, 1 dies] + CRAC (2) [1 est, 1 adq]
Nacimientos NAC		1P ENS (2) [2 crem] + 6 CC	2P ENS (2) [2 curr] + CRAC (6) [6adq] + 1 CC
Lotería PLO		1P ENS (1) [1 crem] + 8 CC	2P CRAC (8) [1 dif, 7 err] + ENS (1) [crem]
Dados PDA		1P ENS (1) [1 crem] + 8 CC	2P ENS (2) [2 curr] + CRAC (7) [7adq]
Terremoto PTE		1P ENS (2) [2 crem] + 7 CC 2P ENS (9) [5 crem, 1 curr, 1 crea, 2 dies]	
Árboles TGH			1P ENS (1) [1 crem] + CRAC (2) [2 dif, 1 err] + 4 CC
Árboles TGV			1P ENS (1) [1 crem] + 1 MEDI + 6 CC 2P ENS (1) [1 crem] + 5 CC
Nueve mascotas MOD		1P CRAC (4) [3 adq, 1 err] + 4 CC 2P CRAC (10) [4 adq, 6 err] + 1 CC	3P ENS (4) [3 crem, 1 dies] + CRAC (1) [1 adq] + 2 CC

6.7.2 Aplicación de Coeficiente V de Aiken

Para la validez de contenido este estudio utilizó el coeficiente de validez de contenido V de Aiken, con un grupo de ocho jueces y de los cuales por lo menos siete estén de acuerdo para que el ítem sea válido, con una escala dicotómica (aprueba o desaprueba el ítem en un aspecto del constructo) alcanzando coeficiente V iguales o superiores a 0,88, a un nivel de significación estadística de $p < 0,05$.

La tabla 19 muestra los códigos de los ítems y número de subítem, y los coeficientes V de Aiken asociados según el CPC, CRAC y Enseñanza, y el área de Estadística que cubre, para un criterio alto (V igual o superior a 0,88) y criterio moderado (V igual o superior a 0,7 y menor a 0,88).

Tabla 19: Coeficientes V de Aiken para cada ítem con criterio alto y p<0,05, y coeficientes V totales, (se incluye la información de los ítems con criterio moderado de los jueces).

	CRAC	Enseñanza	V total	Total ítems
Estadística	LBE 1P(1) LBE 2P(0,75) TDE 2P(1) MED 2P(0,7) MED 3P(0,7) MOD 2P(0,9)	LBE 3P(1) TDE 1P(1) RRE 1P(0,88) NOUT 1P(1) OUT 1P(0,78)	**0,97 Alta** Moderada 0,73	7 4
Probabilidad	DUL 2P (1) DUL 5P(0,73) NAC 2P(0,89) PLO 2P(0,89) PDA 2P(0,88)	DUL 3P (1) DUL 4P 0,73) DUL 6P(0,82) PTE 2P(1)	**0,94 Alta** Moderada 0,76	6 3
Inferencia	PTM 3P(0,88) PTM 4P(1)	PTM 6P(0,7) RRCP 1P(0,9) OLI 1P(0,8) MUE 2P(1)	**0,916 Alta** Moderada 0,7	5 1
V total	**0,94 Alta** 0,72 Moderado	**0,95 Alta** 0,758 Moderado	**0,95**	18 8
Total	9 4	9 4	18 8	

Para el **CRAC** se obtuvo que de los nueve subítems que conforman esta dimensión, cuatro de ellos alcanzan una V de 1,00, y cinco subítems alcanzaron una V. mayor que 0,88, hallándose una V total de 0,94.

Para **Enseñanza** se obtuvo que de los nueve subítems que conforman esta dimensión, seis de ellos alcanzan una V de 1,00, mientras que tres subítems alcanzaron una V mayor que 0,88, hallándose una V total de 0,95.

La validez de contenido del instrumento evaluativo construido con un criterio alto, presenta 18 subítems que de manera equilibrada consideran integradas las temáticas de la Estadística del currículo como del constructo teórico de Shulman. Específicamente el instrumento consta en sus subítems con 7 de estadística, 6 de probabilidad, y 5 de inferencia; respecto al constructo del CPC cuenta con 9 de CRAC y 9 de Enseñanza, (ver tabla 19).

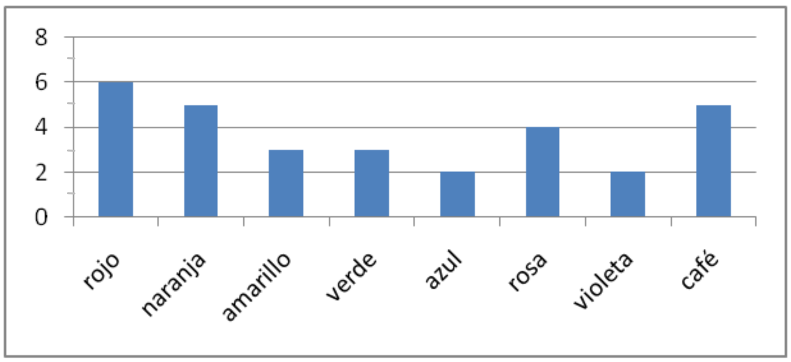
Algunos subítems fueron construidos para comparar con posterioridad a los resultados de instrumentos aplicados a los alumnos respecto a los aplicados al profesor. Si dichos subítems no cumplían con el criterio alto del coeficiente (al menos de un 0,88), y se acepta un criterio conservador de los coeficientes de Aiken (mayor que 0,70) estos subítems pueden ser incluidos en el instrumento final. Esta inclusión no afecta la validez de contenido sino que potencia la validez aparente pues el ítem presenta congruencia con el contexto y/o situación que pretende evaluar, potenciando la validez del instrumento. (En este punto es necesario comentar que Merino (2009) incluso establece la existencia de un criterio liberal para una magnitud del coeficiente igual y superior a 0,5 y menor a 0,7).

6.7.3 Instrumento CPC-DA final

A continuación se presenta el instrumento CPC-DA que consta de 14 ítems e involucra 18 subítems de CPC. El instrumento construido con un criterio alto en el análisis de validez de contenido, a un nivel de significación estadística de $p<0{,}05$ y cuyas especificaciones se encuentran detalladas en apartado anterior, (Tabla 19). Para un resumen detallado de todos los estudios realizados, ver Anexo 7.

<u>Ítem 1</u>

DUL: Hay una bolsa con dulces de colores. El profesor de Trini le deja sacar un dulce de la bolsa, pero sin mirar dentro de la bolsa. El número de dulces de cada color se muestra en el siguiente gráfico.



1E. ¿Cuántos dulces naranja hay?

(a) 6 (b) 4 (c) 4,5 (d) 5

2E. ¿De qué colores hay exactamente 2 dulces?

(a) amarillo y verde (b) verde y azul (c) azul y violeta (d) naranja y violeta

3E. Para igualar la cantidad de dulces azules y dulces rojos. ¿Cuántos dulces azules faltarían colocar en la bolsa?

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) otra cantidad

4E. ¿Cuál es la probabilidad de que Trini saque un dulce de color rojo?

(a) 12,5% (b) 20% (c) 25% (d) 50%

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 4E

2P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

3P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

………………………………………………………………………………………….
………………………………………………………………………………………….

Ítem 2

PTM. Observe el gráfico de arriba y responda,

1P: Tom no está en la escuela hoy día. ¿Cómo piensa que va a llegar a la escuela mañana? ¿Por qué?

………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………..

3P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

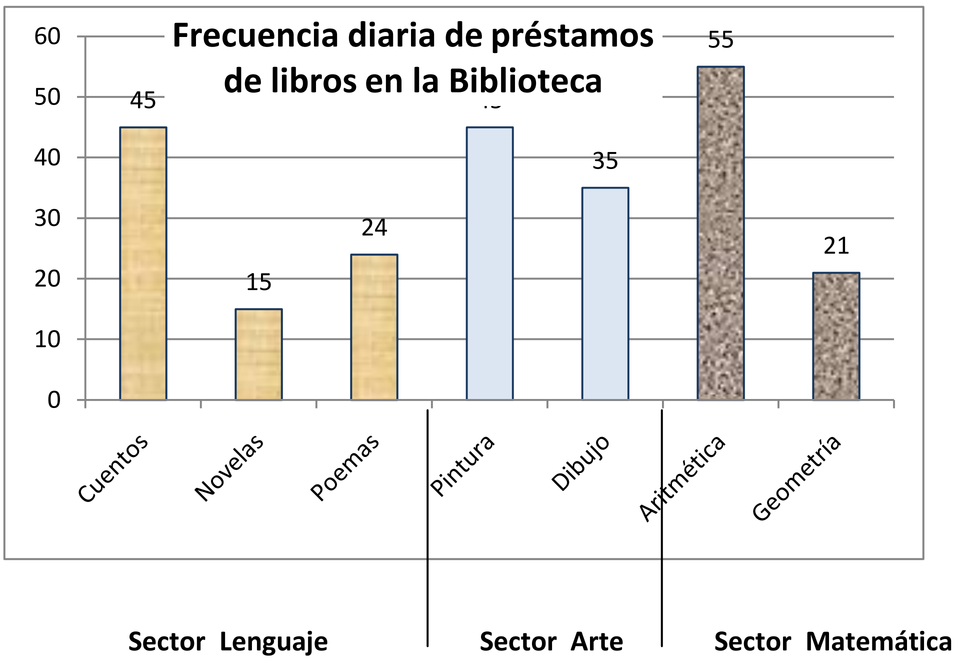
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

4P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

<u>Ítem 3</u>

LBE. Observe cuidadosamente el gráfico y responda marcando la alternativa correcta,



1E. ¿Cuál es el sector que tiene mayor promedio de número de préstamos?

(a) Sector Lenguaje (b) Sector Arte (c) Sector Matemática (d) Todos los sectores

2E. Anita respondió que el promedio de préstamos del sector de Matemática fue de (55+21)/2=38 por lo que el sector Matemática fue el de mayor promedio de préstamos. **¿Considera que tiene razón?**

(a) Sí, porque considera la barra más alta del gráfico

(b) No, porque la suma mayor es del Sector Lenguaje

(c) No se puede saber

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 1E

1P. Considere que Ud. ya ha tratado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

(a) La mayoría

(b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad

(d) Menos de la tercera parte

2P. La estrategia exitosa de sus alumnos sería,

(a) Responder directamente desde el gráfico.

(b) Calcular el promedio con todas las barras.

(c) Calcular el promedio por Sector y comparar.

(d) Calcular las sumas por Sector y comparar.

3P. ¿Para qué nivel cree Ud. que esta pregunta se adapta mejor?

(a) 5 E.B. (b) 6 E.B (c) 7 E.B (d) 8 E.B

¿Por qué?, ____

Ítem 4

TDE. Juan preguntó a sus compañeros si tenían algún perro o gato de mascota. Él marcó con un ✓ las mascotas de cada uno, y recolectó la información siguiente:

Perros y gatos de mis compañeros								
Héctor	perro✓	gato	Karla	perro✓	gato	Rocío	perro✓	gato✓
Matías	perro	gato✓	María	perro	gato	Diego	perro	gato✓
Anita	perro	gato	Keiko	perro	gato✓	Consuelo	perro✓	gato
Tatiana	perro✓	gato	Fran	perro	gato✓	Isabel	perro✓	gato
Juan	perro	gato✓	Yanet	perro✓	gato✓	Seba	perro✓	gato

Para completar la tabla, Juan recibió la ayuda de unos amigos.

1E. ¿Cuál de estas ayuda es correcta?

Indique la alternativa que señale los valores del interior de esta tabla,

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato		
No tiene gato		

(a)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	6
No tiene gato	5	2

(b)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	5
No tiene gato	6	2

(c)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	8	7
No tiene gato	6	2

(d) Otra

1P. ¿En qué nivel propone el currículo el contenido involucrado en esta pregunta?

(a) 1 EB (b) 2 EB (c) 4 EB (d) 5 EB

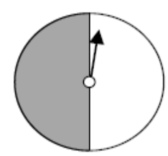
2P. Considere que Ud. ya ha pasado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

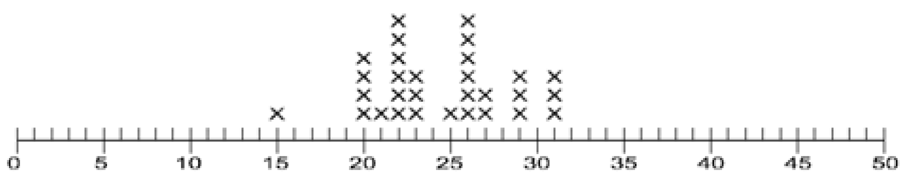
(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

Ítem 5

RRE. Un curso realizó el experimento de girar la flecha de una ruleta como la de la derecha (50 veces por alumno). En la siguiente gráfica, cada alumno anotó con una cruz, el número de veces que la flecha cayó en la parte sombreada.





1E. ¿Cuál es el menor número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 0 (b) 25 (c) 15 (d) No sé

2E. ¿Cuál es el mayor número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 50 (b) 22 (c) 26 (d) 31

3E. ¿Cuál es el rango del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 16 (b) 50 (c) 31 (d) No sé

4E. ¿Cuál es la moda del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 22 (b) 22 y 26 (c) 23, 29 y 31 (d) No sé

5E. Si la giras sólo una vez, ¿cuál es la probabilidad que caiga en la parte sombreada?

(a) 0,5 (b) 80% (c) 20 de 50 (d) No sé

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos al plantear este problema? (lo que <u>más</u> enfatizaría)

(a) Que obtengan datos y hagan los cálculos correctamente

(b) Que lean gráficos y contesten preguntas en grupo

(c) Que observen cómo se distribuyen los datos dado un contexto

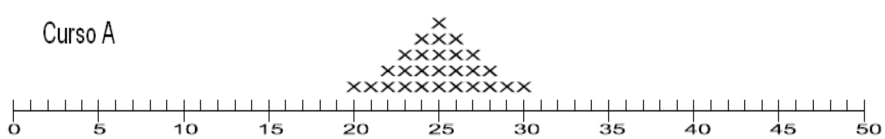
(d) Que asimilen contenidos que pide el currículo

<u>Ítem 6</u>

RRCP. Imagine que otros tres cursos crean gráficos para la ruleta. Se cree que algunos resultados fueron inventados y otros son reales.

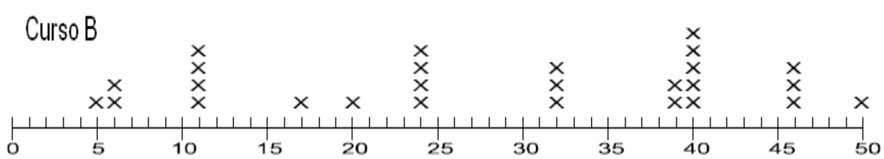
1E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso A, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ________________



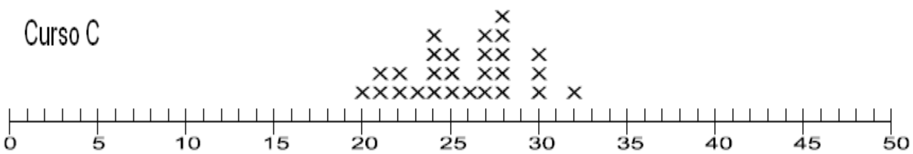
2E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso B, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ________________



3E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso C, son inventados o reales? ¿Por qué?

(a) Inventados (b) Reales Porque, ________________



____

1P. ¿Cuál de las siguientes opciones reflejaría su idea central al plantear este problema a sus alumnos?

(a) Para que sepan que Ud. sabe detectar cuando hacen trampas.

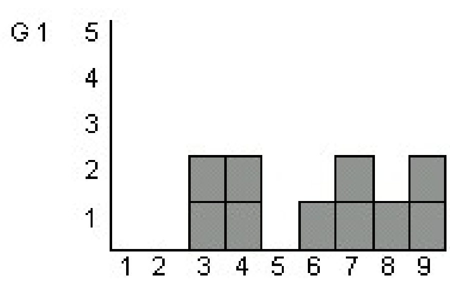
(b) Para que tomen decisiones razonadamente en base a la varianza

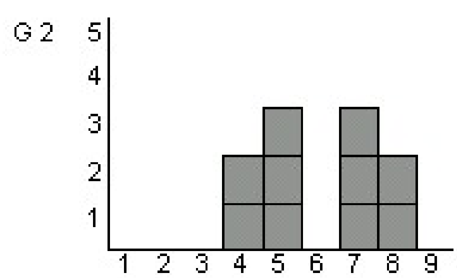
(c) Para que observen cómo se distribuyen los datos y observen la variabilidad

(d) Para que refuercen su lectura de gráficos y contesten preguntas correctamente

Ítem 7

OLI: Veinte alumnos que participarán en una Olimpiada de Matemáticas serán entrenados para ello. Diez de los alumnos forman el Grupo 1 y los otros diez forman el Grupo 2. Los puntajes obtenidos en la Olimpiada se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:





Cada cuadro en la gráfica representa el puntaje obtenido por cada estudiante en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1 los dos cuadros que aparecen por encima del número 9 significan que dos estudiantes en este grupo obtuvieron 9 puntos.

1P. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Grupo 1 es mejor que el Grupo 2, porque en el primero están los alumnos que recibieron puntajes más altos.

(b) Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con puntajes inferiores a 4.

(c) No hay ninguna diferencia entre los dos grupos porque el promedio es el mismo.

(d) Si bien los promedios son los mismos para ambos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo y por lo tanto es mejor.

Ítem 8

MUE: En cierto país, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo a cierto candidato a Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en todo el país, los resultados de esos sondeos se muestran a continuación:

• *Periódico 1:* 36,5% (realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico 2:* 41,0% (realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico 3:* 39,0% (realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico 4:* 44,5% (realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

1E. Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al candidato a presidente?

(a) Periódico 1, por estar a principios de mes y es una muestra al azar

(b) Periódico 4, porque son 1000 votantes y es una encuesta telefónica

(c) Periódico 3, por estar cercana a la elección y es una muestra al azar de 1000 votantes

(d) Periódicos 3 y 4, por ser sondeos de la misma fecha y porque el tamaño muestral es igual en ambos sondeos

2P. ¿Cuál es para Ud., la secuencia idónea para la enseñanza de los conceptos involucrados en este problema?

a. Muestra, población, muestra aleatoria, azar, selección de muestras, tamaño muestral.
b. Azar, muestra, población, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
c. Azar, población, muestra, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
d. Muestra, población, azar, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.

Ítem 9

NOUT. Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación:

	Nombres de los estudiantes							
	Juan	Lucía	Roberto	Ana	Pedro	María	Luis	Clara
Número de preguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. **1E. ¿Cuál de los siguientes métodos usted le recomienda?**

(Marcar una de las siguientes respuestas)

(a) Usar el número más común, que es el 2.
(b) Sumar los 8 números y dividir por 8
(c) Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.
(d) Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos alrededor de este problema? (lo que <u>más</u> enfatizaría)

(a) Que estructuren los conocimientos y resuelvan bien los ejercicios
(b) Se centren en la información y organicen redes de conceptos
(c) Activen los conocimientos previos, integren y vean la utilidad
(d) Trabajen en grupos, aprendan a explicar y argumentar entre ellos

Ítem 10

NAC. La probabilidad de que un recién nacido sea niño es igual a la probabilidad de que sea niña. En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos. El hospital A registra 50 nacimientos por día, el Hospital B registra un promedio de 10 nacimientos por día. En un día en particular,

1E. ¿Cuál hospital tiene mayor probabilidad de registrar un 80% o más de nacimientos de niñas?

(a) Hospital A (con 50 nacimientos al día)

(b) Hospital B (con 10 nacimientos al día)

(c) Los dos hospitales tienen la misma probabilidad de registrar dicho evento

(d) No lo sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(a) Variabilidad en muestras pequeñas

(b) Equiprobabilidad

(c) Ley de los Grandes Números

(d) No sé

Ítem 11

PLO. En un juego de lotería, se tienen que elegir 6 números entre el 1 y el 40, ambos inclusive. Se gana, si acierta a todos los números. Verónica ha elegido 1, 2, 3, 4, 5, 6. Rosa ha elegido los números 39, 1, 17, 33, 8, 27.

1E. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

(a) Verónica tiene una mayor posibilidad de ganar.

(b) Rosa tiene una mayor posibilidad de ganar.

(c) Verónica y Rosa tienen la misma posibilidad de ganar.

(d) No sé

2P. ¿Cuáles alternativas muestran la concepción errónea de sus alumnos sobre secuencias aleatorias?

(a) a y b (b) a y c (c) b y c (d) No sé

Ítem 12

PDA. Supongamos que se lanzan simultáneamente dos dados equilibrados**.**

1E. ¿Cuál de las siguientes situaciones tiene mayor posibilidad de ocurrir?

(a) Obtener el par 5-6

(b) Obtener el par 6-6

(c) Ambas tienen la misma posibilidad

(d) No sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(a) Construcción de tabla de frecuencias y/o diagrama de árbol de espacio muestral

(b) Concepto de suceso y espacio muestral

(c) Concepto de equiprobabilidad y no equiprobabilidad, y de espacio muestral

(d) Concepto de experimento aleatorio y espacio muestral

Ítem 13

PTE: En un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo dijo: "En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de XYZ es dos tercios".

1E. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

(a) (2/3) x 20 = 13,3; por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de XYZ.

(b) 2/3 es más que 1/3, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años.

(c) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

(d) No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

2P. Ud. considera que esta pregunta permite,

(a) Reflexionar y hacer un juicio crítico sobre el significado real de una predicción

(b) Aplicar el modelo de Laplace para responder a una situación probabilística

(c) Reafirmar la incerteza, y la inaplicabilidad de la probabilidad en ciertos casos

(d) Justificar la afirmación, haciendo uso de la matemática

Ítem 14

MOD: Los estudiantes de un curso del segundo ciclo básico registraron los datos acerca de sus mascotas en la siguiente tabla.

Los estudiantes comentaban acerca de los datos y uno de ellos dijo:

"La moda es perro, la mediana es pato, y el rango va de 1 a 7"

2P. Si usted piensa que el estudiante está en un error, identifique el o los errores.

………………………………………………………………

Mascotas	Frecuencia
pájaro	2
gato	4
tortuga	2
perro	7
pato	1
pez	2
ardilla	1
puercoespín	3
conejo	3

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

7.1 Introducción

Los capítulos precedentes se enfocaron en la construcción y validación de contenido de un instrumento que evalúa el conocimiento pedagógico del contenido estadístico de un profesor de educación básica.

Este capítulo cierra el estudio de esta tesis y muestra la discusión de los resultados del estudio, las conclusiones respecto a los objetivos planteados, los aportes, las limitaciones y las propuestas a futuro.

7.2 Conclusiones respecto a los objetivos

En esta sección se analizan los resultados alcanzados respecto a los objetivos declarados en el Capítulo 1.

> *Objetivo General. El propósito fundamental de esta Tesis de Grado es disponer de un instrumento construido según el estado del arte de los nuevos enfoques de Educación Estadística, del conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y del currículo; con validez de contenido para medir el CPC y el CC que posee un profesor de educación básica para la enseñanza de la Estadística dado el actual currículo.*

Este trabajo de tesis se propuso obtener un instrumento que evalúe el CC y CPC del profesor de educación básica, construido según el estado del arte del área. Mediante un estudio de antecedentes se congregaron los elementos constitutivos del instrumento. El Capítulo 2 desarrolla una visión amplia de los antecedentes epistemológicos de los objetos estadísticos que establece el currículo y que enmarca al instrumento; los procesos involucrados en la comprensión de los conceptos estadísticos son analizados en el Capítulo 3 de Representaciones; el estado del arte sobre el conocimiento para la enseñanza, en particular, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento para la enseñanza de la matemática es desarrollado en el Capítulo 4; la investigación sobre el estado del arte de la Educación Estadística principalmente desde la perspectiva de su enseñanza es desarrollada en el Capítulo 5, el que incluye el estudio del actual currículo escolar. En el Capítulo 6 se desarrolla el estudio experimental, que concluye con la validez de contenido del instrumento obtenida a través de la valoración de jueces.

Objetivo Específico 1. Disponer de ítems referidos al CC que demanda el nuevo currículo al profesor y los nuevos enfoques en Educación Estadística, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.

El primer objetivo específico se refiere a la obtención de ítems referidos al conocimiento del contenido en Estadística que requiere un docente en conformidad al currículo y a los nuevos enfoques de Educación Estadística, y cuyas directrices tanto del eje de Datos y Azar como de los nuevos enfoques, son explicitadas en el Capítulo 5. En el estudio experimental del Capítulo 6, se generan las tablas de especificaciones y las tablas resúmenes de estructura, que conforman cada CMO del eje curricular en el instrumento. En el Capítulo 5 también se entrega una propuesta de las características del profesor que enseña Estadística.

Objetivo Específico 2. Disponer de ítems referidos al CPC que demanda el nuevo currículo al profesor, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad, esto es:

- *Ítems referidos al conocimiento de los profesores acerca de la* ***enseñanza*** *del contenido, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.*

- *Ítems referidos al conocimiento de los profesores acerca de la* ***relación de los alumnos con el contenido****, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.*

- *Ítems referidos al conocimiento de los profesores sobre el uso de* ***medios didácticos****, en cuanto a Estadística, Inferencia y Probabilidad.*

El objetivo específico 2 contiene tres componentes adoptadas desde la investigación del constructo teórico asumido, y referidas al CPC que activan los profesores en la tarea de enseñar: el conocimiento de la enseñanza del contenido, el conocimiento de la relación de los alumnos con el contenido, y el conocimiento en el uso de medios didácticos.

La revisión de la literatura realizada sobre el constructo del CPC de Shulman es expuesta en el Capítulo 4, y en base a ella se realiza la imbricación de las dos primeras componentes del constructo con el marco curricular, concretándose en la creación de ítems de CC y CPC. En el Capítulo 6 se realiza la descripción y puesta en juego del estudio experimental, y se especifican los procesos de construcción y puesta a prueba de los ítems referidos a las tres componentes.

La tercera componente relativa a Medios Didácticos no se concretó, pues la valoración de los jueces para esos ítems se comportó de manera mixta, sin poder determinarse qué aspecto del CPC medía. Una propuesta futura para ítems que midan el rol de soporte de los Medios Didácticos usado por el profesor se presenta en el Anexo 8.

> *Objetivo Específico 3. Asegurar la validez de contenido del instrumento para medir el CC y el CPC del profesor de educación básica, en cuanto a la Estadística, Inferencia y Probabilidad.*

El objetivo específico 3 se logra con la validación del instrumento CPC-DA, que es el resultado del estudio experimental registrado en el Capítulo 6. En dicho capítulo se encuentra la especificación del objeto estadístico, el marco teórico asumido, el diseño metodológico y los diferentes procedimientos del estudio. Finalmente el CPC-DA final contiene de manera proporcional ítems de Estadística, Probabilidad e Inferencia según el currículo escolar, y está diseñado para evaluar tanto el CC como el CPC del eje Datos y Azar; también, el CPC-DA presenta de manera equitativa ítems de Enseñanza y CRAC.
Tras la construcción del CPC-DA se procedió a validar el instrumento según el grado de acuerdo de expertos en el área, este proceso dio validez de contenido al instrumento, ocupándose una validación de contenido de criterio alto a un nivel de significación menor al 0,05.

7.3 Discusión

La categorización asumida de tres dimensiones del CPC (Enseñanza, CRAC y Medios) y los indicadores (los aspectos de las dimensiones, por ejemplo, currículo errores, dificultades, concepciones, entre otros) sirvieron para organizar los énfasis en los ítems y para abordar los diversos aspectos del actuar en la práctica docente. Sin embargo, para analizar el grado de acuerdo de los jueces que validaron el instrumento y tras clasificar sus valoraciones de los ítems como puros, compuestos e integrales, se determinó analizar sólo con las dimensiones sin la especificidad de sus aspectos. Ello coincidió con los comentarios previos de la doctora Sorto en una comunicación personal, y también con el artículo de Hill et al. (2008), pues el CRAC es un aspecto fácil de entender pero difícil de medir y de diferenciar en los profesores, por ejemplo en el CRAC todos los aspectos están íntimamente vinculados, los alumnos tienen concepciones erróneas porque tienen dificultades, las que en su mayoría son comunes y se manifiestan en estrategias usuales.

Al respecto, y desde otra perspectiva, la Dra. Serrado-Bayes en una comunicación particular (Anexo 3), señala *"…llama la atención la distinción en la clasificación*

CRAC (Conocimiento del profesor en relación al Saber del alumno), que se especifiquen como categorías diferentes DIFI (Dificultades más frecuentes de los alumnos) y ERRO (Errores posibles de los alumnos). En nuestros estudios, ambas surgen como producto de las decisiones de intervención de los profesores". Su comentario destaca que los errores y dificultades se vinculan a los diferentes niveles de conocimiento profesional del profesor en relación al saber de los alumnos puestos en juego en la acción de enseñar. Por lo tanto el CRAC es una red de conocimientos del profesor difícilmente diferenciados, donde las creencias sobre la matemática y sobre el aprendizaje que tienen los profesores pueden ser más poderosas que la adquisición del conocimiento del contenido y/o del conocimiento de los errores y dificultades de los alumnos.

Los capítulos que componen los Antecedentes del Estudio alimentan el proceso constructivo del instrumento en cuanto al CC, las nociones primarias de los objetos estadísticos del estudio, la profundización en los procesos de la representación gráfica, y los nuevos enfoques y dificultades y errores investigados en la Educación Estadística. Esta base de conocimiento permite crear, elegir y filtrar ítems de contenido de Estadística a ser enseñados, y articular con las competencias del profesor que se activan al enseñar Estadística.

En un principio, la fuerza de la epistemología personal dificultó la elaboración en cuanto a la construcción de las preguntas que miden el CPC. Si bien la revisión de literatura permitió recolectar ítems, éstos son construidos para medir el CC. Al inicio del proceso constructivo, reiteradamente los ítems que se elaboraban medían el CC aunque eran construidos para medir el CPC. La recolección de trabajos de investigación sobre el CPC del grupo de la Universidad de Michigan, y las versiones liberadas de algunos de sus ítems de evaluación del CPC de matemática, más las interesantes observaciones y discusiones con los profesores Ismenia Guzmán y Raimundo Olfos, permitieron comprender y crear ítems que midiesen principalmente el CPC.

La introducción del eje de Datos y Azar en el currículo chileno llega a lo menos con una década de retraso respecto a otros países. Además, en el análisis realizado al programa de estudio desde el nivel básico al nivel medio, se detectó la ausencia del concepto de variación, que es una de las grandes ideas estadísticas, (nueve desde la literatura actual de Educación Estadística). En el programa de educación básica no se encuentra explicitada la intención de desarrollar este concepto, aspecto característico de los datos estadísticos, y sólo a tres años de terminar la educación escolar, en el nivel 10, se menciona la medida más básica de variabilidad: el rango.

También en el currículo se detectan conceptos tratados en forma tangencial, como el concepto de variable, y el de aleatoriedad. Asimismo, existe un desfase en la introducción y tratamiento de las complejas tablas de doble entrada (su estudio solo se explicita en el nivel 2, nivel que además acusa muy poco peso de la Estadística en el programa); no hay intención explícita de vincular la Estadística y la Probabilidad, que podría ayudar en la comprensión y conexión de la Estadística Inferencial. Quizás los estándares de contenido para los profesores puedan llenar estos vacíos o tratamientos tangenciales detectados.

La propuesta inicial de una batería de preguntas que incluía 20 ítems con 60 subítems, tras el análisis de los jueces, se redujo a 14 ítems con 18 subítems. La eliminación del 30% de los ítems, sugiere que en el proceso de construcción de ítems del CPC debe cuidarse:

(1) El lenguaje ocupado en el ítem, pues si en la alternativa y/o distractores se ocupan palabras que definen un aspecto, los jueces tienden a evaluar lo que está explícito en el aspecto del CPC, y se desvinculan con lo que realmente mide el ítem. Un ejemplo de ello se da con el ítem que evalúa el conocimiento de las propiedades de la media, Cód. MED, y que se presentaba de la siguiente manera:

MED: Un vendedor de ropa coloca el siguiente aviso en su negocio: "Pantalones para la venta, diferentes precios, precio promedio de $5000".

1E. Desde la lectura del aviso, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) La mayoría de los pantalones costarían entre $ 4000 y $ 6000.
(b) La mitad de los pantalones costaría menos de $ 5000, y la otra mitad costaría más que $ 5000.
(c) Al menos uno de los pantalones costaría $ 5000.
(d) Algunos pantalones costarían menos que $ 5000.

1P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno confunde el cálculo del promedio con el cálculo de la mediana? _______________

2P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que el promedio tiene que corresponder a un dato? _______________

3P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que siempre los datos se distribuyen simétricamente? _______________

Las frases "alumno confunde" y "alumno cree" de los subítems 1P, 2P y 3P del ítem en cuestión, induce a creer que mide CRAC, el conocimiento relativo al saber del alumno respecto a sus errores o dificultades o conocimientos adquiridos. Para poder elegir la alternativa correcta es imprescindible conocer el contenido estadístico. Al parecer el lenguaje empleado provocó que seis de los jueces evaluaran estos subítems como CRAC, aunque difícilmente este ítem de conocimiento profundo de la Estadística puede medir el conocimiento del profesor respecto a los saberes de sus alumnos, en la forma que está redactado.

(2) La creación de escenarios para la construcción de ítems es un tema esencial en la preparación de los ítems del instrumento, es el escenario el que da sentido real a una situación de enseñanza. La complejidad de la lectura del ítem se acentúa con el contenido y el escenario toma tal fuerza en la comprensión del ítem que el profesor responderá al ítem con la exigencia cognitiva de diferenciar el contenido mismo de la disciplina con el conocimiento de la enseñanza del contenido, o diferenciar el contenido mismo de la disciplina con el conocimiento del profesor en relación al saber del alumno.

(3) El conocimiento de los medios didácticos, MEDI, involucra el uso de soporte que hace el profesor de la representación concreta con el contenido, ello incluye el uso de esquemas, ilustraciones, dibujos, materiales concretos, entre otros. En esta dimensión del CPC, creemos que las representaciones requieren más que el lenguaje natural, necesitan desvincularse del contenido como conocimiento curricular o conocimiento, y presentarse mediante la representación simbólica. El solo uso del lenguaje natural que explicita la representación es insuficiente para hacer emerger en el profesor la representación que él usa en la enseñanza del concepto, por lo tanto parece necesario representar el objeto en las alternativas de respuesta, la representación que autoidentifica al profesor con su propio uso de las representaciones concretizadoras en la enseñanza.

(4) La alternativa “No sé” fue utilizada para ítems de un dominio difícil, como es Probabilidades, para los cuales existe una alta posibilidad de que los profesores no respondan y se demoren o salten un ítem considerado difícil. Lo anterior concuerda con Rowan et al. (2001) sobre la alternativa “No sé” en la escritura de ítems.

Respecto al punto (3) y como se señaló en el Capítulo 4, parecen necesarias más investigaciones sobre las representaciones concretizadoras que apoyan la enseñanza efectiva, pues no aparece muy analizado y trabajado en las investigaciones del CPC como tampoco en la Didáctica de la Matemática. Falta investigación y líneas de desarrollo que estudien el rol de las representaciones en la enseñanza, y que integren lo cognitivo con lo didáctico, con un enfoque dado por la Teoría de Representaciones de Duval y la Didáctica broussoniana.

Al parecer, en la literatura hispanoparlante no hay discusión sobre la denominación dada de CDC, conocimiento didáctico del contenido, y el CPC. En parte del Capítulo 4 se trata la diferencia entre los significados del CPC y CDC, y se asume una postura frente a ello con base en el constructo y la didáctica francesa.

Buscar entrelazar el constructo teórico de Shulman y el enfoque de la Didáctica de la Matemática francesa puede ser una tarea difícil y un tema tensional, no obstante se pueden construir puentes que emergen naturalmente, aunque en la Didáctica de orientación francesa existe mayor organización y trabajo realizado en profundidad (en especial de la TAD y de la ID) que en el constructo del CPC que evoluciona desde los trabajos de Shulman.

7.4 Aportes del estudio

El principal aporte del presente estudio es disponer de un instrumento que evalúe el CPC de Estadística de los profesores en Chile, inexistente hasta ahora, debido a la relativamente reciente innovación curricular de matemática que considera por primera vez un eje de Estadística y Probabilidad que cruza toda la etapa escolar.

Otros aportes entregados en este estudio son disponer de:

- Un instrumento que evalúe el CPC de Estadística de los profesores en Chile, con validez de contenido (validez externa) y validez interna dada por el análisis a priori.

- Una revisión de literatura del CPC, la cual reúne información útil sobre la naturaleza conceptual del CPC de Shulman, constructo en desarrollo en el que se ha realizado escasa investigación.

- Una de las primeras investigaciones en Chile que reúne el estado del arte sobre Educación Estadística y sobre el CPC en Estadística.

- Un análisis del currículo de matemática chileno en su eje de Estadística en el nivel escolar del ciclo básico, explicitando los conceptos involucrados y exponiendo los diferentes pesos de los temas estadísticos básicos: Estadística Descriptiva, Estadística Inferencial y Probabilidad.

- Tres elementos importantes a considerar en la enseñanza de la Estadística: la taxonomía sobre la comprensión gráfica de Curcio, la diferenciación de los niveles cognitivos de Garfield y el concepto de transnumeración de Pfannkuch.

- Establecer cierta conciencia de la complejidad de la tarea de enseñar Estadística que tiene el profesor, evidenciado a través de los aspectos del CPC, los nuevos aportes de la Didáctica de la Matemática, y la Enseñanza de la Estadística dentro del paradigma no determinístico.

7.5 Limitaciones

El instrumento CPC-DA para el profesor ha sido desarrollado para ser posteriormente comparado en sus subítems de CPC con el instrumento para el alumno, similar en las componentes de CC (ver Anexo 4 los instrumentos para los alumnos), por lo tanto una posible limitación de su empleo es la dependencia entre instrumentos a distintos sujetos. Aunque esta limitación puede verse como una innovación, pues explora una misma problemática desde sus dos actores principales del aula, buscando obtener datos empíricos de profesores y alumnos.

Como todo instrumento evaluativo está ligado a la cultura, al tiempo en que se construyó y al currículo escolar de Chile, lo cual eventualmente puede limitar su utilización dada nuestra idiosincracia.

7.6 Propuestas futuras

Dada la complejidad de variables que inciden en las decisiones que debe tomar un profesor en el aula, una propuesta es que futuras investigaciones del CPC de los profesores se complementen con investigaciones del conocimiento pedagógico, CP, pues el manejo de la disciplina, la motivación, el manejo del tiempo entre otras, son variables que también afectan los resultados de la enseñanza.

La Estadística y la Probabilidad son ciencias recientes si se les compara con la Aritmética o la Geometría; su estreno en el currículo también las hace nuevas en el contexto escolar, como también son nacientes los conocimientos sobre la Didáctica de la Estadística. Dichas características hacen necesario investigar para comprender los diversos aspectos epistemológicos, cognitivos, didácticos, y sociales que surgen en la enseñanza de la Estadística. A nivel mundial estos elementos requieren investigación, pues los procesos de enseñanza aprendizaje de la Estadística son distintos a los de la Matemática.

Como se señaló en la discusión inicial de este capítulo, falta estudio sobre las representaciones. Se cree necesario continuar en esta vía articulando con la teoría de las representaciones semióticas de Duval, realizando investigaciones que vinculen la comprensión de las representaciones por parte del alumno con el uso de las representaciones por parte del profesor.

Considerando la experiencia adquirida al construir ítems sobre el CPC, pareciese que el ejercicio de elaboración posibilita ampliar la mirada del docente mas allá de los contenidos, permitiéndole relacionar nociones asociadas a la enseñanza y al conocimiento de la relación del alumno al saber. Este juego de planos, del CC y del CPC, tiene el potencial de desarrollar en los profesores o estudiantes a profesor, otra mirada de reflexión sobre las situaciones que emergen en el aula, una mirada didáctica sobre el propio actuar del profesor en la tarea de enseñar un saber.

REFERENCIAS

Aiken, L. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, 45, pp. 131-142.

American Psychological Association, American Educational Research Association y National Council on Measurement in Education, (1999). Standards for educational.

An, S., Kulm, G. y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S., *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, pp. 145–172.

Anónimo, (2006). Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor. Documento de discusión. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 8, pp. 63–75.

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (3), pp. 298-318. Recuperado en junio 2010 desde http://www.iejme.com/032007/d10.pdf

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J.M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, pp. 93 – 104.

Artigue, M. (2004). Problemas y Desafíos En Educación Matemática: ¿Qué Nos Ofrece Hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, Santillana*. Distrito Federal, México. 16 (3), pp. 5-28.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, pp. 33-59. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Aristóteles, Constitución de Atenas, XXIII, 3-5 y XXIV. Recuperada en enero 2010, http://agora.ucv.cl/docs/528/HIS_ANT/gredoc06d.htm

Ainley, J. (2000). Transparency in graphs and graphing tasks An iterative design process. *Journal of Mathematical Behavior* , 19, pp. 365-384

Baillé, J., y Vallérie, B. (1993). Quelques obstacles cognitifs dans la lecture des représentations graphiques élémentaires. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 1(3), pp. 73-104.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V.

Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th ed., pp. 433– 456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D, Bass, H., Sleep, L., y Hoover, M. (2004). Using Records of Practice to Tackle the Unsolved Problem of Teachers' mathematical Knowledge. Center for Proficiency in Teaching Mathematics University of Michigan. Recuperada en diciembre 2009 desde http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/022304_bbsh1CSUN.pdf

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows math well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator*, pp. 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2005). Articulating domains of mathematical knowledge for teaching. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Ball, D., y Sleep, L. (2007). What is Mathematical Knowledge for Teaching, and what are features of tasks that can be used to develop MKT? Presentation made at the Center for Proficiency in Teaching Mathematics (CPTM) pre-session of the annual meeting of the Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE), Irvine, CA, January 25, 2007. Recuperada en mayo 2010 desde http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/012507_CPTM_presession.pdf

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Bakker, A., Biehler, R., y Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots? Curricular Development in Statistics Education. Proceedings of the: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable. Ed. G. Burrill y M. Camden. IASE, 163-173. Recuperado en diciembre 2009 desde http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/4.2_Bakker_etal.pdf

Barahona, E. (2004). Estudio de Validez del Cuestionario de Prácticas Pedagógicas Para la Creatividad (CPPC). *PSYKHE*, 13 (1), pp. 157-174. Recuperado en septiembre 2010 desde http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=s0718-22282004000100013&script=sci_arttext

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Recuperado en marzo 2008 desde http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/didacticaestadistica.zip

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12.

Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C. y Arteaga, P. (2009). Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Granada: Sociedad Thales. Recuperada en agosto 2010 desde http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/TallerParadojas.pdf

Baumert, J. et al. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*. 47 (1), pp. 133–180.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In J. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics.* Ed J. Garfield y G. Burrill. Voorburgo, International Statistical Institute, pp. 54-64.

Bergamini, D. (1963). *Mathematics*. (Time / Life series). New York: Times. New York.

Bertin, J. (1967). Semiologie Graphique. Recuperado en enero 2010 desde http://classiques.uqac.ca/collection_methodologie/bertin_jacques/representations_visuelles_info/semiologie_graphique_%20Jacques%20Bertin.pdf

Biehler, R. (1986). Exploratory data analysis and the secondary stochastics curriculum. Recuperado en mayo 2009 desde http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots2/Biehler.pdf

Bolívar, A. (2005). Conocimiento Didáctico Del Contenido y Didácticas Específicas. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), pp. 1 -39.

Bright, G. W. y Friel, S. N. (1998). Interpretation of data in a bar graph by students in grades 6 and 8. Paper presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, San Diego, CA.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Segunda parte). IREM, Université de Bordeaux, Francia. Versión castellana de Luis Puig. Recuperada en mayo de 2010 desde http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/didmat_web/referencias/1.%20perspectiva/didactica2%20Brousseau.pdf

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., Brousseau N., Warfield Virginia. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, pp. 363-441.

Brousseau, G. (2003). "Cours de l'école d'été de didactique des mathématiques", Actes de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003), ARDM.

Brousseau, G. (2004). "Investigaciones En Educación Matemática", Conferencia Plenaria, XII Jornadas Nacionales De Educación Matemática, Chile, 2004. Recuperado en junio 2007 desde http://www.sochiem.cl/sochiem/documentos/XII/inicio.pdf

Brousseau, G. (2009). Alternatives en didactique de la statistique. Manuscrit auteur, publié dans "41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux (2009)". Recuperado en Julio de 2010 desde http://hal.inria.fr/docs/00/38/66/26/PDF/p71.pdf

Burgess, T. (2007). Investigating The Nature of Teacher Knowledge Needed and used in Teaching Statistics. Disertación doctoral no publicada. Massey University Palmerston North, New Zealand.

Buschang, R. (2008). Validating Measures of Math Teacher Knowledge. California Educational Research Association Annual Meeting CERA Preparation and Professional Development Rancho Mirage, CA, diciembre, 2008.

Campbell-Kelly, M., Mary Croarken, Raymond Flood y Eleanor Robson (2003). *The history of mathematical tables: from Sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.

Castro, E. (2005). Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. Recuperado en mayo 2010 desde http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro(CIBEM).pdf.

Castro, Encarnación y Castro, Enrique (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori. Recuperado en junio 2010 desde http://books.google.cl/books?hl=es&lr=&id=mL8vCHLptaIC&oi=fnd&pg=PA11&dq

=castro+encarnacio+enrique+castro+1997+&ots=WSVmm3j77O&sig=kiOkl5Uz6CA3laIa0eNjqSp3bek#v=onepage&q&f=false

Chance, B. L. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, 10(3). Recuperado en enero 2010 desde www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. y Mathieu-Wozniak, F. (2006). Enseigner la statistique en classe de seconde: conditions et contraintes. Recuperado en diciembre 2009 desde http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Enseigner_la_statistique_en_seconde.pdf

Chick, H. (2003). Transnumeration and the Art of Data Representation. Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Conference Publication: Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of MERGA. Deakin University Press (Melbourne), 1, pp. 207-214.

Chick, H.L., y Watson, J.M. (2001). Data representation and interpretation by primary school students working in groups. *Mathematics Education Research Journal*, 13, pp. 91-111.

Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.

Coutanson, B. (2010). La question de l'éducation statistique et de la formation de l'esprit statistique à l'école primaire en France. Étude exploratoire de quelques caractéristiques de situations inductrices d'un enseignement de la statistique au cycle III. Disertación doctoral no publicada. Université de LYON - Université Lumière Lyon 2. Lyon. Francia.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

DelMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. *Journal of Statistics Education*, Volume 10 (3). Recuperado en junio de 2010 desde http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html

Del Puerto S., Seminara, S., y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*. No. 43 (3).

Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, pp. 45-50.

Díaz, C. (2007). Viabilidad de la Enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el Análisis de Datos en Psicología. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

Díaz, C. (2009). Probabilidad condicional: sesgos e implicaciones para la enseñanza de la estadística. Cap. 2, pp. 33-56. En Serrano, L. (Ed.). Tendencias Actuales de la Investigación en Educación Estocástica. Universidad de Granada. España.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2003). Comment Analyser le Fonctionnement Representationnel des Tableaux et leur Diversite? *SPIRALE - Revue de Recherches en Éducation* -, N° 32, pp. 7-31. Recuperado en junio 2010 desde http://spirale-edu-revue.fr/IMG/pdf/1_Duval_Spi32F.pdf

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103–131.

Espinel, M.C., González, M.T., Bruno, A. y Pinto, J. (2009). Las Gráficas Estadísticas. Capítulo 7, pp. 133-156. En Serrano, L. (Ed.). *Tendencias Actuales de la Investigación en Educación Estocástica.* Universidad de Granada. España.

Espinoza, L. (2009). Análisis de las competencias matemáticas en NB1. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Informe de Proyecto FONIDE N°: DED0760, enero 2009.

Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Errores en el Cálculo de Probabilidades en Tablas de Doble Entrada en Profesores en Formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Núm. 44. pp. 48-57. Recuperado en abril 2010, desde http://web.udl.es/usuaris/z4084849/docs/uno44.pdf

Estrella, S. (2008). Medidas de Tendencia Central en la Enseñanza Básica en Chile: análisis de un texto de séptimo año, *Revista Chilena de Educación Matemática*, 4(1), 20–32.

Estrella, S. (2009). Panorama actual de las investigaciones internacionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Ponencia en las XXXVI Jornadas Nacionales de Estadística, Universidad de la Frontera, Temuco.

Estrella, S. (2010). “Una joya de los gráficos informativos”, propuesta y material no publicado de curso Datos e Incertidumbre, Programa Beta de Pontificia UCV, Valparaíso.

Estrella, S. y Olfos, R. (2010). Changing the understanding of Probability in talented children. Proceedings of 8th International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Eslovenia.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., y Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children’s thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403–434.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers’ knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 147–164. New York: Macmillan.

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R., Burrill, G. y Sandow, D. (2005). A conceptual framework for knowledge for teaching school algebra. Manuscrito no publicado, Michigan State University. Recuperado en marzo de 2010, desde www.educ.msu.edu/kat/ESMarticle.doc

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), pp. 96-105

Franklin, C., y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. In G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 *Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance.* Reston, VA: NCTM.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (2), pp. 124-158.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S., y Konstantinidou, K. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, 22 (2), 183-197(15).

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, 70(1), pp. 1-25, (sin discusión).

Galbiati, J. (s.f.). “Desarrollo Histórico de la Estadística”. Recuperado en marzo de 2010, http://www.jorgegalbiati.cl/ejercicios_4/HistoriaEstadistica.pdf.

García, J. J. (2005). La Comprensión de las Representaciones Gráficas Cartesianas presentes en los Libros de Texto de Ciencias Experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el Aula. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education* [Online], 10(3). www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review.* 75 (3), pp. 372–396.

Garrett, A. y García, J.A. (2005). Un Cuestionario y Estrategias sobre los Promedios. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, pp. 197-217. Universidad de La Laguna. España.

Garritz, A. y Trinidad-Velasco, R. (2004). El conocimiento pedagógico del contenido. *Educación Química*, 15(1), 98-103.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18 (1), pp. 7-33.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(3), pp. 673-702.

Gattuso, L., y Pannone, M. (2002). Teacher’s training in a statistic teaching experimentation. In B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape Town: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Godino, J. D. (2002). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2010 en http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/02_MarcosCM.pdf

Godino, J. (2003). Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Recuperado en abril de 2010 en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Grossman, P. L., Wilson, S. M., y Shulman, L. (1989). Profesores de Sustancia: El conocimiento de la materia para enseñanza. Profesorado. *Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 9 (2). Universidad de Granada, España. Recuperado en noviembre de 2009 desde http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=56790203

Grossman, P.L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and Teacher Education. New York/London: Teachers College Press.

Grossman, P. L. (1995). Teachers' knowledge. In L. W. Anderson (Ed.), *International encyclopedia of teaching and teacher education*, (2), 20–24. Oxford, UK: Pergamon Press.

Grossman, P. L. (2008a). Responding to our critics: From crisis to opportunity in research on teacher education. *Journal of Teacher Education*, 59(1), 10–23.

Grossman, P. L., y McDonald, M. (2008b). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, 45(1), 184–205.

Groth, R. (2003). Development of a High School Statistical Thinking Framework. Disertación doctoral no publicada. Department of Mathematics, Illinois State University. Illinois.

Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11(3), 273–292.

Hiebert, J., Gallimore, R., y Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3–15.

Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal*, 105 (1),11-30. Recuperado en noviembre 2009 desde http://sii.soe.umich.edu/documents/hill_schill_ball.db.r59E46.pdf

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371–406.

Hill, H. C., Ball, D. L., Blunk, M., Goffney, I. M., y Rowan, B. (2007). Validating the ecological assumption: The relationship of measure scores to classroom teaching and student learning. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2–3), 107–117.

Hill, H., Ball, D., y Shilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge, Conceptualizing and Measuring Teachers´ Topic Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematic Education*. (39) 4, 327-400.

INE (2010). *Retratos de nuestra identidad: Los Censos de Población en Chile y su evolución histórica hacia el Bicentenario*. Recuperado en junio 2010, http://www.memoriachilena.cl/archivos2/pdfs/MC0054244.pdf

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Janvier, C. (1981). Dificulties related to the concept of variable presented graphically. In C. Comiti (Ed), Proceedings of the fifth international conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 189 – 193). IGPME. Grenoble, France.

Janvier, C. (1983). Teaching the concept of function. *Mathematical Education for Teaching.* 4, (2), 48 – 60.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Kilpatrick, J. (2003). Twenty years of French didactique viewed from the United States. *For the Learning of Mathematics*, 23 (2), 23–27.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. Artículo del Plenario del Simposio de aniversario 100 del ICMI, en Roma, marzo 2008.

Krauss, S., Baumert, J. y Blum, W. (2008a). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education*, 40, 873–892.

Krauss,S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., y Jordan, A. (2008b). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100 (3), pp. 716-725.

Lederman, N., y Gess-Newsome, J. (1999). *Examining Pedagogical Content Knowledge.* Kluwer Academic Publishers.

Liu, H. J. (1998). A cross-cultural study of sex differences in statistical reasoning for college students in Taiwan and the United States. Disertación doctoral no publicada, University of Minnesota, Minneapolis.

Llinares, S. (1998). La Investigación Sobre el Profesor de Matemáticas: Aprendizaje del Profesor y Práctica Profesional. *Aula*, 10, pp. 153-179.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah*, NJ: Erlbaum.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y Enseñanza de las Matemáticas Elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tiene los profesores en China y los EE.UU*. Editado por Academia Chilena de Ciencias.

Mayén, S. (2009). Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

McKinsey & Co., (2007). "Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivo". Buenos Aires. Recuperado en agosto 2010 desde http://www.eduteka.org/pdfdir/McKENSEY_InformeReformaEducativa.pdf

McClain, K. y Cobb, P. (2001). Supporting Students' Ability to Reason about Data. *Educational Studies in Mathematics.* 45, (1-3), pp. 103-129.

Meletiou-Mavrotheris, M., Paparistodemou, E., Mavrotheris, y E., Stav, J. B. (2008). EarlyStatistics: Pedagogical Framework. Thessaloniki: Early Statistics Consortium.

Mendonça, T., Coutinho, C., y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference onTeaching Statistics.

Merino, C. y Livia, J. (2009). Intervalos de confianza asimétricos para el índice la validez de contenido: Un programa Visual Basic para la V de Aiken. *Anales de Psicología*, 25 (1), pp. 169-171. Universidad de Murcia, España. Recuperado en agosto 2010 desde http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=16711594019

Mickelson, W. T., y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

MINEDUC, Propuesta Ajuste Curricular. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Matemática. Junio, 2009. Ministerio de Educación. Chile.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2003). Exploring Critical Sense In Graphing. Mathematics Education Research Centre, Institute of Education, University of Warwick. Recuperado en abril de 2010 desde http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip22-3/BSRLM-IP-22-3-11.pdf

Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graph. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador, Brasil: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Recuperado en abril de 2010 desde www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2G1_MONT.pdf

Moritz, J. (2006). Developing Students' Understandings and Representations of Statistical Covariation. Disertación doctoral no publicada, University of Tasmania.

MT21. (2007). Mathematic Teaching in the 2st Century, The Preparation Gap: Teacher Education forMiddle School Mathematics in Six Countries. Michigan University.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Department of Education. Washington, DC.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Noll, J. (2007). Statistics teaching assistants' statistical content knowledge and pedagogical content knowledge. Disertación doctoral no publicada, Portland State University, Portland, OR.

OECD (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación*: Chile. OECD, Paris y Ministerio de Educación de Chile.

OECD. (2010). *Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010*. Recuperado desde http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf

SÁENZ, C. (1999). Materiales para la enseñanza de la teoría de las probabilidades. Propuesta de un modelo teórico. Madrid: ICE, de la Universidad Autónoma de Madrid.

SERCE (2009). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. Aportes para la enseñanza de la Matemática*. LLECE, OREALC/UNESCO.

Olfos, R., y Estrella, S. (2010a). Comprensión de probabilidad en niños con talento y en profesores de educación básica en ejercicio. Manuscrito en preparación. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemática.

Olfos, R., y Estrella, S. (2010b). Chilean Primary Teachers Challenged to Build PCK for Statistics. Proceedings of 8th International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Eslovenia.

Olfos, R. y Estrella, S. (2010c). Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido para la Enseñanza de la Estadística. Ponencia presentada en IX Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística, CLATSE, Viña del Mar, Chile.

Oriol, J-C. (2007). Formation à la statistique par la pratique d'enquêtes par questionnaires et la simulation : étude didactique d'une expérience d'enseignement dans un département d'IUT. Disertación doctoral no publicada, Université Lumière Lyon 2. Ecole Doctorale EPIC. Institut de Sciences et Pratiques de l'Education et de la Formation. Recuperado en octubre 2009 desde http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/24/20/PDF/_Total_2007_10_17_JCO_2_.pdf

Ottaviani, M. (1998). Induzioni: The Italian Journal On Teaching Statistics, Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate Università di Roma La Sapienza, Italia. Procedings of 5th International Conference on Teaching Statistics, Singapure.

Ortiz, J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada. Editores C. Batanero y L. Serrano. Recuperado en diciembre 2009 desde www.ugr.es/.../libros%20y%20tesis%20doctorales.htm

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huesca: España.

Park, S., y Oliver, S. (2008). Revisiting the Conceptualization of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a Conceptual Tool to Understand Teachers as Professionals. *Research in Science Education*, (38) 3, 261-284.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Université, France.

Pinto, J. E. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación. Disertación doctoral no publicada. Universidad de Salamanca. España.

PISA (2003). Released Items. Recuperada en diciembre de 2009 desde http://www.pisa.oecd.org/document/31/0,3746,en_32252351_32236191_41942687_1_1_1_1,00.html

Quay Hutchison, E. (2000). La historia detrás de las cifras: la evolución del censo chileno y la representación del trabajo femenino, 1895-1930. *Revista "Historia*" UC, No 33, pp. 417-434.

Régnier, J-C, (2000). Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique. Entre praxéologie et épistémologie scolaire. Université Marc Bloch, Strasbourg. Recuperada en diciembre de 2009 desde http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/14/08/PDF/HDR_JCR_2000.pdf

Régnier, J-C. (2003). A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique. Recuperada en mayo 2010 desde http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/34/27/PDF/CRE2002_22-23_Regnier.pd

Rico, L. (2009). Sobre las Nociones de Representación y Comprensión en la Investigación en Educación Matemática. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4 (1), pp. 1-14. Recuperado en junio de 2010 en http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2009Sobre.pdf

Rico, L. y Castro, E. (2000). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. En Cuadernos de Formación del Profesorado. Segunda Edición. Editorial Horsori.

Rowan, B., Schilling, S. G., Ball, D. L., y Miller, R. (2001). Measuring teachers' pedagogical content knowledge in surveys: An exploratory study. Appendix C: Item Writing Recommendations. University of Michigan. Recuperado en noviembre 2009 desde http://www.sii.soe.umich.edu/documents/Appendix%20C%20Item%20writing%20Hill%20Schill%20Ball.pdf

Ruiz, B. (2006). Un acercamiento cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto Variable Aleatoria. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México. Recuperada en marzo 2010 desde http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/ruiz_2006.pdf

Ruiz. B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Competencias de Futuros Profesores en la Comparación de Datos. En *Tendencias Actuales de la Investigación en Educación Estocástica*. Editor, Luis Serrano. Universidad de Granada, España. Cap. 3, pp. 57-74.

Rumsey, D. J. (2002). Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. *Journal of Statistics Education*, 10(3). Recuperada en mayo 2009 desde www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html

Sáenz, C. (1997). La Naturaleza de la Probabilidad. Una Revisión Histórico-Epistemológica. Capítulo 1. *Revista de Investigación e Innovación Educativa*, *Tarbiya*. Nº 15.

Sáenz, C. (1999). *Materiales para la Enseñanza de la Teoría de Probabilidades*. Cuadernos del ICE 21. Ediciones de la UAM. Recuperado en septiembre de 2008 desde www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/capitulo%201.doc

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(1), pp. 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), pp. 1–22.

Sliva, J., Strage, A., y Bergthold, T. (2007). Content Knowledge Achievement: Placing Mathematics Content for Prospective K-8 School Teachers in Context Through Field Experiences. En T. Lamberg, T. y L. Wiest, (Eds.). Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

Sorto, M. A. (2004). Prospective Middle School Teachers' Knowledge about Data Analysis and its Application to Teaching. Disertación Doctoral no publicada, Michigan State University, Department of Mathematics. Michigan.

Spence, I. (2000). The invention and use of statistical charts. *Journal de la Société Francaise de Statistique*, 141, pp. 77-81. Recuperada en abril de 2010 desde http://www.psych.utoronto.ca/users/spence/Spence_2000.pdf

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. New York: Springer.

Swafford, J. O., Jones, y G. A., Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), pp. 476–483.

TIMMS (2007). Released Items. Recuperada en diciembre 2009 desde http://timss.bc.edu/timss2007/context.html

Tournes, D. (2000). Pour une Histoire du Calcul Graphique. *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 p. 127–161. Recuperada en agosto 2010 desde http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/6/pdf/smf_rhm_6_127-161.pdf

Turnuklu, E., y Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: Preservice primary math teachers´ perspectives. Turkey. IUMPS: *The Journal*. (1)

Tversky, B. (2001). Spatial schemas in depictions. In M. Gattis (Ed.), *Spatial schemas and abstract thought*. pp. 79-111. Cambridge: MIT Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Teppo, A. (2007). Tasks, teaching sequences, longitudinal trajectories: about micro didactics and macro didactics. Short Oral Presentation at PME 31, Seoul, Korea, 8-13 July, 2007.

Varas, L. y Lacourly, N. (2010). Evaluación de diversas componentes del Conocimiento Matemático necesario para enseñar matemáticas en Enseñanza Básica. Presentación en Congreso CIAE-CEPPE, Santiago, 2010.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10 (2, 3), pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal for Mathematical Behaviour*, 17 (2), pp. 167-181.

Watson, J., y Kelly, B. (2003). Inference from a pictograph: Statistical literacy in action. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Geelong, pp. 720-727). Sydney, NSW: MERGA

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), pp. 223-265.

Wilson, S. M., Floden, R. E., y Ferrini-Mundy, J. (2002). Teacher preparation research: An insider's view from the outside. *Journal of Teacher Education*, 53(3), 190-204.

Wilson, S. M., Shulman, L. S., y Richert, E. R. (1987). ‘150 different ways’ of knowing: Representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.). *Exploring teachers' thinking*, pp. 104-124. London: Cassell.

ANEXO 1

Tabla de Especificaciones de Contenidos para el nivel 4 y el nivel 7

TABLA DE ESPECIFICACIONES TEST DE 4TO	OBJETIVOS	Extraer información cuantitativa para completar tabla de doble entrada	Extraer dato cuantitativo desde representación de la recolección	Extraer información desde dos representaciones gráficas (parte todo y grafico de barras verticales)	Extraer información cuantitativa desde pictograma	Evaluar el nivel de comunicación de información de dos representaciones (tabla y pictogram)
CONTENIDOS 4to		TD1E	SP6E	CIHT	TG1E GPE1	TG2E
Producción y comunicación de información a partir de datos organizados en tablas	6 min	4 min 1 punto				
Producción y comunicación de información a partir de datos organizados en gráficos de barras simples, tanto verticales como horizontales	6 min		(2 min c/u) 4 min 2 puntos			
Discusión sobre el tipo de datos que se puede representar a través de tablas y gráficos de barras simples.	2 min					1 min 1 punto
Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde tablas, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia.	4 min				TGE1E 2 min 1 punto	
Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información desde gráficos de barras simples verticales y horizontales, comparación y formulación de afirmaciones respecto a las situaciones o fenómenos a los que se hace referencia.	18 min			3 min 1 punto	GPE1 1 min 1 punto	

Tiempo: 36 minutos **Puntaje Total**: 19 puntos (4to) y 3 puntos (5to)

Extraer información cuantitativa para entregar información cualitativa	Extraer dato cuantitativo interpolando valores del eje cartesiano	Extraer información cualitativa al comparar valores de un eje cartesiano	Extraer información cuantitativa al comparar valores de un eje cartesiano	Asociar tablas con gráficos correspondientes	Percibir la variabilidad	Predecir la posibilidad de ocurrencia	Interpretar dato "cero" desde eje	Completar barra de gráfico
MEG1E GMMEDD1 GMMEDD2	PRDULA1E	PRDULA2E	PRDULA3E PRDULB4E GPE2 GMMEDD3	CIRT1 CIRT2	GPE3	GPE4 GPE6	GPE5	GMMEDD3
				CIRT1 2 min 1 punto				
								2 min 1 punto
							1 min 1 punto	
				CIRT2 2 min 1 punto				
MEG1E 3 min 1 punto GMMED1 3 min 1 punto GMMED2 2 min 1 punto	PRDULA1 1 min 1 punto	PRDULA2 1 min 1 punto	PRDULA3 1 min 1 punto PRDULB4 1 min 1 punto GPE2 2 min 1 punto					

22 subitemes en 8 contextos diferentes: P1-1, P2-2, P3-1, P4-3, P5-4, P6-6, P7-2, P8-3

TABLA DE ESPECIFICACIONES TEST DE 7MO	OBJETIVO	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
CONTENIDOS 7mo		TD1E	SP6E 1E 2E	CIHT	TG1E GPE1	TG2E	GMMED D1 GMMED D2	PRDUA 1E	PRDUL A2E GRP1E	PRDUA 3E PRDUB4 E GPE2 GMMED D3	CIRT1 CIRT2	GPE3
17. Análisis de ejemplos de diferentes tipos de tablas y gráficos, argumentando en cada caso acerca de sus ventajas y desventajas en relación con las variables representadas, la relación de dependencia entre estas variables, la información a comunicar y el tipo de datos involucrado.	32 min			3 min 1 p	TG1E 2 min 1 p GPE1 2min 1 p	1 min 1 punto	GMED1 3 min 1 p GMED2 2 min 1 p	1 min 1 p	PRDU2E 1 min 1 p GRP1E 2 min 1 p	PRDU3E 1 min 1 p GMED3 2 min 1p GPE2 2 min 1 p		
18. Establecimiento y aplicación de criterios para la selección del tipo de tablas o gráficos a emplear para organizar y comunicar información obtenida desde diversas fuentes, y construcción de dichas representaciones mediante herramientas tecnológicas.	19 min	3 min 1 p	(2 min c/u) 4 min 2 puntos								CIRT1 2 min 1 punto CIRT2 2 min 1 punto	
19. Caracterización de la representatividad de una muestra, a partir del tamaño y los criterios en que esta ha sido seleccionada desde una población. Discusión acerca de cómo la forma de escoger una muestra afecta las conclusiones relativas a la población. 20. Discusión acerca de la manera en que la naturaleza de la muestra,	3 min											
21. Predicción respecto a la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio simple y contrastación de ellas mediante el cálculo de la frecuencia relativa asociada a dicho evento e interpretación de dicha frecuencia a partir de sus formatos decimal, como fracción y porcentual.	17 min									PRDUL B4 1 min 1 punto		1 min 1 p

Tiempo: 71 minutos **Puntaje Total**: 37 puntos 37 subitemes en 14 contextos diferentes: P1-4, P2-1, P3-1, P4

K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
GPE3	GPE4 GPE6 SP65E	GPE5	TG3E TG4E GPM1E	PRESI	PRDU4 PRUDB5	PROB1E	PROB2E	PROB3E	SP63E	SP64E	MEDSI MC1E	MEDSI MC2E	GRP2E CIRT2 2E
			TG3E 4 min 1p TG4E 1 min 1 p GPM1E 3 min 1 p										GRP2E 1 min 1 p CIRT2 2E 1 min 1 p
		1 min 1 puesto							1 min 1 p	1 min 1 p	2 min 1 p	3 min 1 p	
				3 min 1 p									
1 min 1 p	GP4 2 min 1 p GP6 3 min 1 p				PRDU4 3 min 1 p PRUDB5 1 min 1 p	1 min 1 p	3 min 1 p	2 min 1 p					

P3-1, P4-5, P5-6, P7-3, P8-5, P9-2, P10-2, P11-2, P12-1, P13-4, P14-3

OBJETIVOS

A: Extraer información cuantitativa para completar tabla de doble entrada

B:Extraer dato cuantitativo desde representación de la recolección

C: Extraer información desde dos representaciones gráficas (parte todo y grafico de barras verticales)

D: Extraer información cuantitativa desde pictograma

E: Evaluar el nivel de comunicación de información de dos representaciones distintas (tabla simple y pictograma)

F: Extraer información cuantitativa para entregar información cualitativa.

G: Extraer dato cuantitativo interpolando valores del eje cartesiano.

H: Extraer información cualitativa al comparar valores de un eje cartesiano.

I: Extraer información cuantitativa al comparar valores de un eje cartesiano.

J: Asociar tablas con gráficos correspondientes.

K: Percibir la variabilidad.

L: Predecir la posibilidad de ocurrencia.

M: Interpretar dato “cero” desde eje.

N: Completar barra de gráfico

O: Calcular media aritmética extrayendo datos desde tabla o gráfico

P: Argumentar cómo afecta el método de selección y el tamaño de la muestra sobre los datos recogidos y las conclusiones relativas a la población.

Q: Interpretar probabilidad mediante cálculo de frecuencia relativa porcentual.

R: Medir sesgo de falsa idea de representatividad

S: Medir sesgo de Equiprobabilidad

T: Aplicar concepto de Ley de los Grandes Números

U: Calcular rango

V: Visualizar moda

W: Calcular mediana para número de datos impar

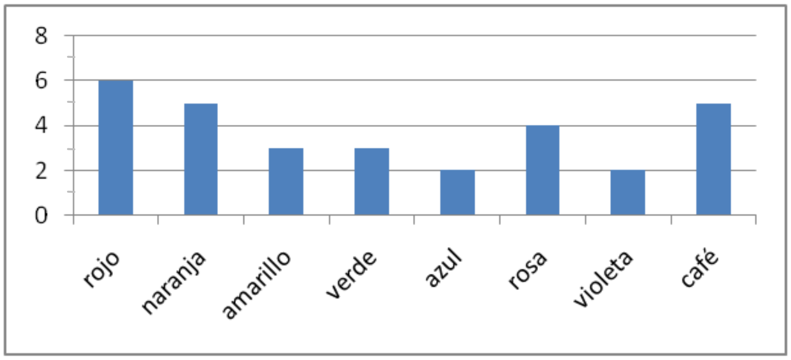
X: Calcular mediana para número de datos par

Y: Identificar tipo de variable

ANEXO 2

Instrumento Inicial

DUL: Hay una bolsa con dulces de colores. El profesor de Trini le deja sacar un dulce de la bolsa, pero sin mirar dentro de la bolsa. El número de dulces de cada color se muestra en el siguiente gráfico.



1E. ¿Cuántos dulces naranja hay?

(b) 6 (b) 4 (c) 4,5 (d) 5

2E. ¿De qué colores hay exactamente 2 dulces?

(a) amarillo y verde (b) verde y azul (c) azul y violeta (d) naranja y violeta

3E. Para igualar la cantidad de dulces azules y dulces rojos. ¿Cuántos dulces azules faltarían colocar en la bolsa?

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) otra cantidad

4E. ¿Cuál es la probabilidad de que Trini saque un dulce de color rojo?

(a) 12,5% (b) 20% (c) 25% (d) 50%

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 4E

1P. ¿Cuáles son las principales ideas estadísticas en este problema?

……………………………………………………………………………………..

2P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

…………………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………….

3P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

……………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………….

4P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

12,5 % pues hay 8 colores y debe sacar 1 color que es el rojo, entonces 1/8 = 125/1000= 12,5%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

………………………………………………………………………………………...

5P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Hay 6 dulces de color rojo y (5+3+3+2+4+2+5=24) 24 de los otros colores, 6/24=1/4= 25%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

………………………………………………………………………………………...

6P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

La barra del rojo es la más alta y el porcentaje mayor es 50%

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

………………………………………………………………………………………...

PTM. Observa el gráfico de arriba y responde,

1P: Tom no está en la escuela hoy día. ¿Cómo piensa que va a llegar a la escuela mañana? ¿Por qué?

………………………………………………………………………………..

2P. ¿Cuáles son las principales ideas de estadística en este problema?

…………………………………………………………………………………..

3P. Dé un ejemplo de una respuesta apropiada y una respuesta inapropiada que podrían dar sus estudiantes.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4P. Vincule con un concepto anterior, o posterior, de Datos y Azar, para usar este problema.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

5P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Bicicleta, la mayoría de los niños va en bicicleta a la escuela. **¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?**

…………………………………………………………………………………..

6P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Tom vendrá a la escuela en tren porque no hay nada al lado de tren así que debe ser él.

¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?

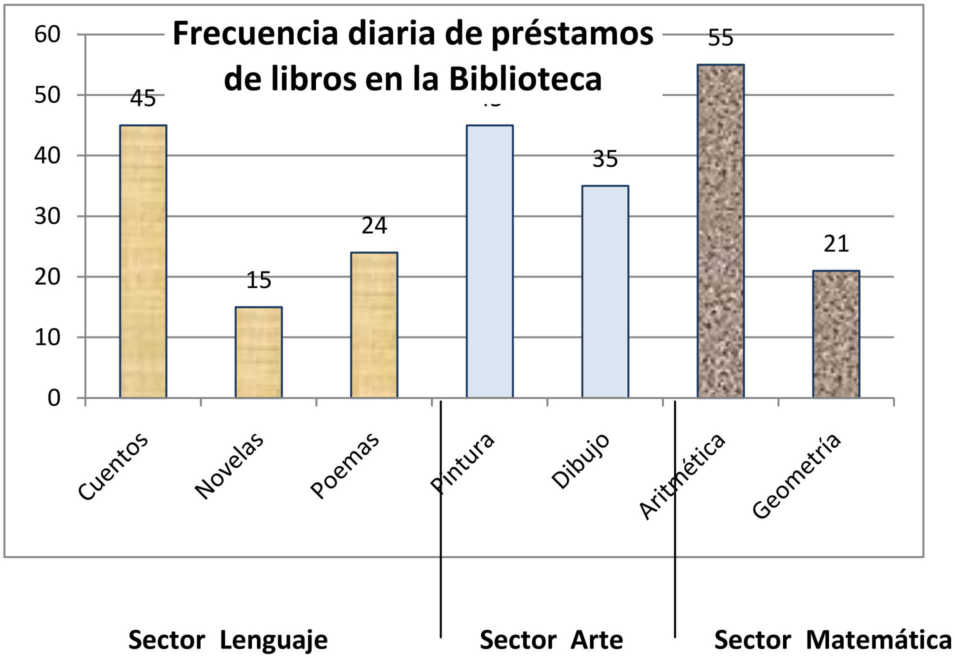
…………………………………………………………………………………..

7P. Un estudiante le da la siguiente respuesta:

Bus, porque hay una regularidad y el siguiente es un niño. **¿Cómo llevaría la comprensión del estudiante a un nivel mayor?**

…………………………………………………………………………………..

LBE. Observa cuidadosamente el gráfico y responde marcando la alternativa correcta,



1E. ¿Cuál es el sector que tiene mayor promedio de número de préstamos?

(a) Sector Lenguaje (b) Sector Arte (c) Sector Matemática (d) Todos los sectores

2E. Anita respondió que el promedio de préstamos del sector de Matemática fue de (55+21)/2=38 por lo que el sector Matemática fue el de mayor promedio de préstamos. **¿Consideras que tiene razón?**

(a) Sí, porque considera la barra más alta del gráfico

(b) No, porque la suma mayor es del Sector Lenguaje

(c) No se puede saber

Las siguientes preguntas conciernen sólo al ítem 1E

1P. Considere que Ud. ya ha tratado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

2P. La estrategia exitosa de sus alumnos sería,

(a) Responder directamente desde el gráfico.

(b) Calcular el promedio con todas las barras.

(c) Calcular el promedio por Sector y comparar.

(d) Calcular las sumas por Sector y comparar.

3P. ¿Para qué nivel cree Ud. que esta pregunta se adapta mejor?

(a) 5 E.B. (b) 6 E.B (c) 7 E.B (d) 8 E.B

¿Por qué?, ____

TDE. Juan preguntó a sus compañeros si tenían algún perro o gato de mascota. Él marcó con un ✓ las mascotas de cada uno, y recolectó la información siguiente:

Perros y gatos de mis compañeros		
Héctor perro✓ gato	Karla perro✓ gato	Rocío perro✓ gato✓
Matías perro gato✓	María perro gato	Diego perro gato✓
Anita perro gato	Keiko perro gato✓	Consuelo perro✓ gato
Tatiana perro✓ gato	Fran perro gato✓	Isabel perro✓ gato
Juan perro gato✓	Yanet perro✓ gato✓	Seba perro✓ gato

Para completar la tabla, Juan recibió la ayuda de unos amigos.

1.E ¿Cuál de estas ayuda es correcta?

Indica la alternativa que señale los valores del interior de esta tabla,

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato		
No tiene gato		

(a)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	6
No tiene gato	5	2

(b)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	5
No tiene gato	6	2

(c)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	8	7
No tiene gato	6	2

(d) Otra

____

1P. ¿En qué nivel propone el currículo el contenido involucrado en esta pregunta?

(a) 1 EB (b) 2 EB (c) 4 EB (d) 5 EB

2P. Considere que Ud. ya ha pasado los contenidos relativos a este tema de Datos y Azar. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder esta pregunta?

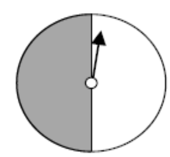
(a) La mayoría

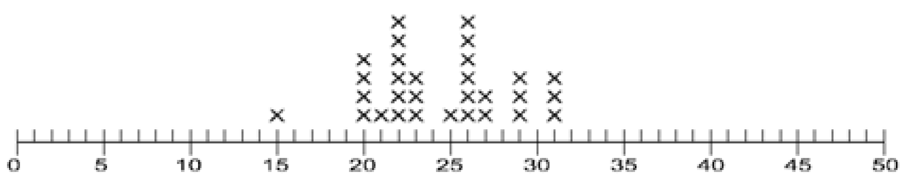
(b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad

(d) Menos de la tercera parte

RRE. Un curso realizó el experimento de girar la flecha de una ruleta como la de la derecha (50 veces por alumno). En la siguiente gráfica, cada alumno anotó con una cruz, el número de veces que la flecha cayó en la parte sombreada.





1E. ¿Cuál es el menor número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 0 (b) 25 (c) 15 (d) No sé

2E. ¿Cuál es el mayor número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 50 (b) 22 (c) 26 (d) 31

3E. ¿Cuál es el rango del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 16 (b) 50 (c) 31 (d) No sé

4E. ¿Cuál es la moda del número de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 22 (b) 22 y 26 (c) 23, 29 y 31 (d) No sé

5E. Si la giras sólo una vez, ¿cuál es la probabilidad que caiga en la parte sombreada?

(a) 0,5 (b) 80% (c) 20 de 50 (d) No sé

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos al plantear este problema? (lo que <u>más</u> enfatizaría)

(a) Que obtengan datos y hagan los cálculos correctamente

(b) Que lean gráficos y contesten preguntas en grupo

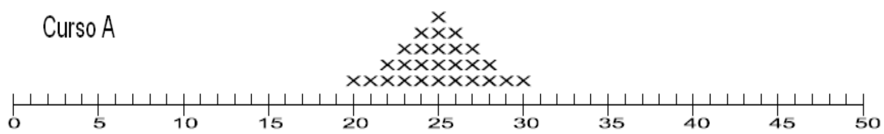
(c) Que observen cómo se distribuyen los datos dado un contexto

(d) Que asimilen contenidos que pide el currículo

RRCP. Imagine que otros tres cursos crean gráficos para la ruleta. Se cree que algunos resultados fueron inventados y otros son reales.

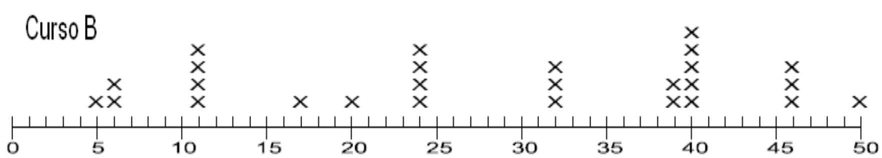
1E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso A, son inventados o reales? ¿Por qué?

(b) Inventados (b) Reales Porque, _________________



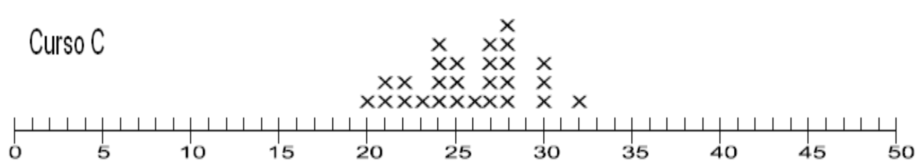
2E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso B, son inventados o reales? ¿Por qué?

(b) Inventados (b) Reales Porque, _________________



3E. Observe el gráfico, ¿piensa que los resultados del experimento del curso C, son inventados o reales? ¿Por qué?

(b) Inventados (b) Reales Porque, _________________



1P. ¿Cuál de las siguientes opciones reflejaría su idea central al plantear este problema a sus alumnos?

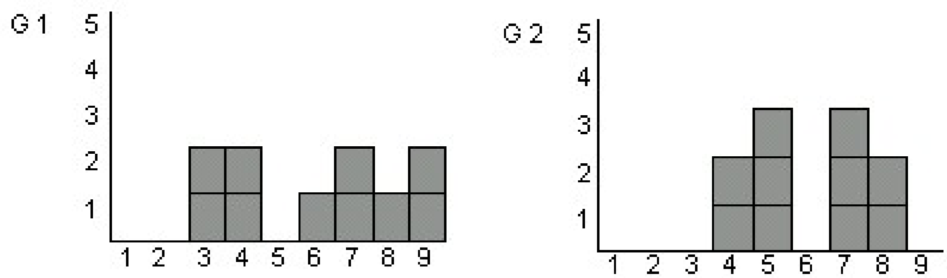
(e) Para que sepan que Ud. sabe detectar cuando hacen trampas.

(f) Tomen decisiones razonadamente en base a la varianza

(g) Observen cómo se distribuyen los datos y observen la variabilidad

(h) Para que refuercen su lectura de gráficos y contesten preguntas correctamente

OLI: Veinte alumnos que participarán en una Olimpiada de Matemáticas serán entrenados para ello. Diez de los alumnos forman el Grupo 1 y los otros diez forman el Grupo 2. Los puntajes obtenidos en la Olimpiada se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada cuadro en la gráfica representa el puntaje obtenido por cada estudiante en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1 los dos cuadros que aparecen por encima del número 9 significan que dos estudiantes en este grupo obtuvieron 9 puntos.

1P. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(e) Grupo 1 es mejor que el Grupo 2, porque en el primero están los alumnos que recibieron puntajes más altos.

(f) Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con puntajes inferiores a 4.

(g) No hay ninguna diferencia entre los dos grupos porque el promedio es el mismo.

(h) Si bien los promedios son los mismos para ambos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo y por lo tanto es mejor.

2P. Secuencie las tareas estadísticas para que los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para responder:

(a) Análisis de gráfico, cálculo de promedio, distribución de medias iguales

(b) Leer datos del gráfico, comparar máximo y mínimo, obtener de moda, distribución

(c) Extraer datos de gráfico, media ponderada, distribución de medias iguales, varianza

(d) Análisis de histograma, media, distribución, varianza

MUE: En cierto país, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo a cierto candidato a Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en todo el país, los resultados de esos sondeos se muestran a continuación:

• *Periódico A:* 36,5% (realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico B:* 41,0% (realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico C:* 39,0% (realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

• *Periódico D:* 44,5% (realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

1P. Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al candidato a presidente?

(a) Periódico A, por estar a principios de mes y es una muestra al azar

(b) Periódico D, porque son 1000 votantes y es una encuesta telefónica

(c) Periódico C, por estar cercana a la elección y es una muestra al azar de 1000 votantes

(d) Periódicos C y D, por ser sondeos de la misma fecha y porque el tamaño muestral es igual en ambos sondeos

2P. ¿Cuál es para Ud., la secuencia idónea para la enseñanza de los conceptos involucrados en este problema?

(a) Muestra, población, muestra aleatoria, azar, selección de muestras, tamaño muestral.
(b) Azar, muestra, población, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
(c) Azar, población, muestra, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.
(d) Muestra, población, azar, muestra aleatoria, selección de muestras, tamaño muestral.

MED: Un vendedor de ropa coloca el siguiente aviso en su negocio: “Pantalones para la venta, diferentes precios, precio promedio de $5000”.

1E. Desde la lectura del aviso, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) La mayoría de los pantalones costarían entre $ 4000 y $ 6000.
(b) La mitad de los pantalones costaría menos de $ 5000, y la otra mitad costaría más que $ 5000.
(c) Al menos uno de los pantalones costaría $ 5000.
(d) Algunos pantalones costarían menos que $ 5000.

1P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno confunde el cálculo del promedio con el cálculo de la mediana? ________________

2P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que el promedio tiene que corresponder a un dato? ________________

3P. ¿Cuál de las alternativas evidencia que el alumno cree que siempre los datos se distribuyen simétricamente? ________________

NOUT. Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación:

	Nombres de los estudiantes							
	Juan	Lucía	Roberto	Ana	Pedro	María	Luis	Clara
Número de preguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. **1E. ¿Cuál de los siguientes métodos usted le recomienda?**

(Marcar una de las siguientes respuestas)

(a) Usar el número más común, que es el 2

(b) Sumar los 8 números y dividir por 8

(c) Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7

(d) Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7

1P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos alrededor de este problema? (lo que <u>más</u> enfatizaría)

(a) Que estructuren los conocimientos y resuelvan bien los ejercicios

(b) Se centren en la información y organicen redes de conceptos

(c) Activen los conocimientos previos, integren y vean la utilidad

(d) Trabajen en grupos, aprendan a explicar y argumentar entre ellos

OUT: Nueve estudiantes pesaron un pequeño objeto con un mismo instrumento calibrado en su clase de Ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6,2 6,0 6,0 15,3 6,1 6,3 6,23 6,2 6,2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto.

1P. ¿Cuál de los siguientes argumentos esperaría escuchar entre estos alumnos?

(a) Usar el número que más se repite, que es 6,2.

(b) Usar 6,23 ya que es la medición más precisa.

(c) Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

(d) Desechar el valor 15,3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

2P. ¿Qué intenta que aprendan los alumnos alrededor de este problema?

(a) Usar correctamente las medidas de tendencia central

(b) Comparar y elegir entre media y moda

(c) Calcular la media usando todos los valores

(d) Considerar el contexto y aplicar concepto de valores atípicos al calcular la media

NAC. La probabilidad de que un recién nacido sea niño es igual a la probabilidad de que sea niña. En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos. El hospital A registra 50 nacimientos por día, el Hospital B registra un promedio de 10 nacimientos por día. En un día en particular,

1P. ¿Cuál hospital tiene mayor probabilidad de registrar un 80% o más de nacimientos de niñas?

(e) Hospital A (con 50 nacimientos al día)

(f) Hospital B (con 10 nacimientos al día)

(g) Los dos hospitales tienen la misma probabilidad de registrar dicho evento

(h) No lo sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(e) Variabilidad en muestras pequeñas

(f) Equiprobabilidad

(g) Ley de los Grandes Números

(h) No sé

PLO. En un juego de lotería, se tienen que elegir 6 números entre el 1 y el 40, ambos inclusive. Se gana, si acierta a todos los números. Verónica ha elegido 1, 2, 3, 4, 5, 6. Rosa ha elegido los números 39, 1, 17, 33, 8, 27.

1P. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

(a) Verónica tiene una mayor posibilidad de ganar.

(b) Rosa tiene una mayor posibilidad de ganar.

(c) Verónica y Rosa tienen la misma posibilidad de ganar.

(d) No sé

2P. ¿Cuáles alternativas muestran la concepción errónea de sus alumnos sobre secuencias aleatorias?

(b) a y b (b) a y c (c) b y c (d) No sé

PDA. Supongamos que se lanzan simultáneamente dos dados equilibrados**.**

1P. ¿Cuál de las siguientes situaciones tiene mayor posibilidad de ocurrir?

(a) Obtener el par 5-6

(b) Obtener el par 6-6

(c) Ambas tienen la misma posibilidad

(d) No sé

2P. ¿Cuál es el conocimiento más importante que deben adquirir sus alumnos para enfrentar este problema?

(a) Construcción de tabla de frecuencias y/o diagrama de árbol de espacio muestral

(b) Concepto de suceso y espacio muestral

(c) Concepto de equiprobabilidad y no equiprobabilidad, y de espacio muestral

(d) Concepto de experimento aleatorio y espacio muestral

PTE: En un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo dijo: “En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de XYZ es dos tercios”.

1P. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

(a) (2/3) x 20 = 13,3; por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de XYZ.
(b) 2/3 es más que 1/3, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años.
(c) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad XYZ en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
(d) No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

2P. Ud. considera que esta pregunta permite,

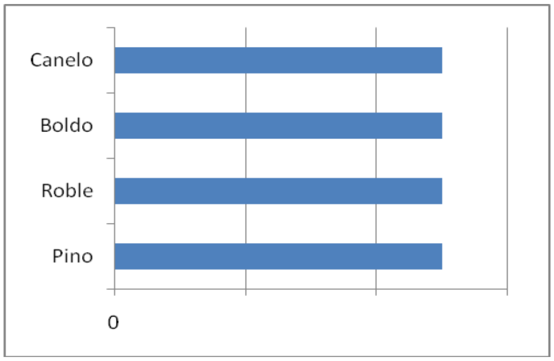
(a) Reflexionar y hacer un juicio crítico sobre el significado real de una predicción
(b) Aplicar el modelo de Laplace para responder a una situación probabilística
(c) Reafirmar la incerteza, y la inaplicabilidad de la probabilidad en ciertos casos
(d) Justificar la afirmación, haciendo uso de la matemática

TGH: En un Parque Nacional se contaron cuatro tipos de árboles nativos chilenos.

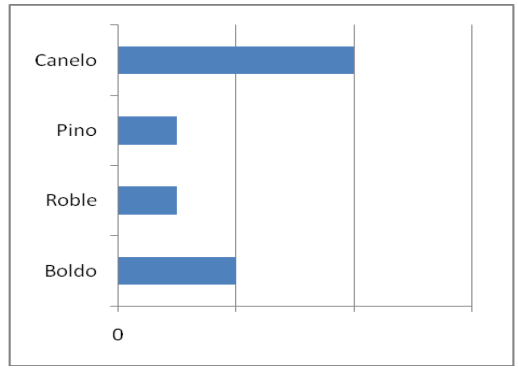
Tipo de Árbol	**Número de árboles**
Canelo	200
Pino	100
Roble	50
Boldo	50

1E. ¿Cuál de los siguientes gráficos muestra correctamente la información de la tabla?

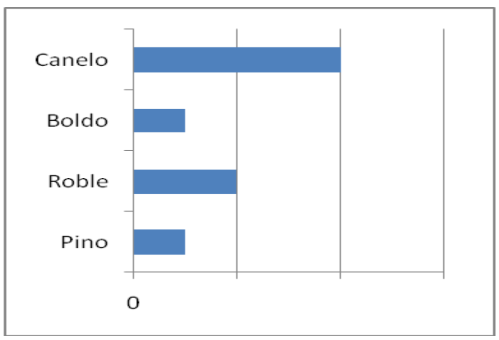
(a



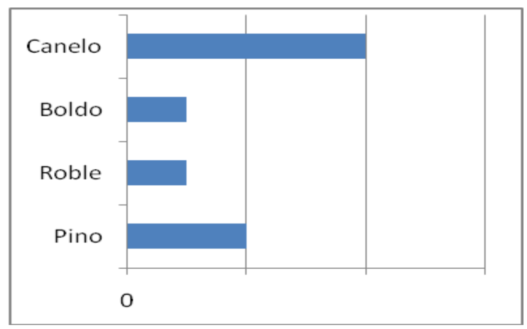
(b



(c



(d

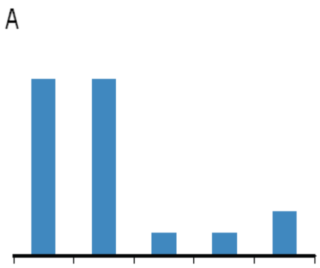


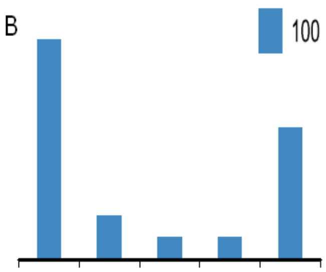
1P. ¿Qué dificultad principal tendrían sus alumnos con la conversión de la tabla al gráfico?:

(a) lectura de la tabla
(b) lectura de la escala del gráfico
(c) lectura de longitudes de barras
(c) lectura de cambio de orden de nombres en escala

TGV: En 1000 Parques Nacionales se contaron la cantidad de robles plantados en cada uno. Los resultados fueron los siguientes:

Cantidad de Robles	*Cantidad de Parques*
1	500
2	100
3	50
4	50
5 ó más	300





1P. ¿Cuál es el gráfico que corresponde a la tabla?

(a) el gráfico A (b) el gráfico B (c) ambos gráficos (d) otro gráfico

2P. El tipo de variable es cuantitativa y ___________,

(a) discreta (b) continua (c) dicotómica (d) ordinal

3P. ¿Cuántos de sus alumnos tendrían éxito en responder la pregunta 2P?

(a) La mayoría (b) Más de la mitad

(c) Un poco menos de la mitad (d) Menos de la tercera parte

MOD: Los estudiantes de un curso del segundo ciclo básico registraron los datos acerca de sus mascotas en la siguiente tabla.

Los estudiantes comentaban acerca de los datos y uno de ellos dijo:

"La moda es perro, la mediana es pato, y el rango va de 1 a 7"

Mascotas	**Frecuencia**
pájaro	2
gato	4
tortuga	2
perro	7
pato	1
pez	2
ardilla	1
puercoespín	3
conejo	3

1P. Si usted piensa que el alumno está en lo correcto, explique por qué.

…………………………………………………………………………
……

2P. Si usted piensa que el estudiante está en un error, identifique el error (s).

…………………………………………………………………………

3P. Si Ud. detecta errores en la comprensión de esta pregunta por parte de sus alumnos, Ud. comenzaría el trabajo principalmente en:

(a) Concepto de medidas de tendencia central

(b) Concepto tablas de frecuencia

(c) Medidas de tendencia central y rango

(d) Concepto de variable cualitativa

ANEXO 3

Comentarios sobre la Selección de Ejercicios,

De Dra: Serrado_Bayes

Los comentarios se refieren a diferentes aspectos tanto de la tabla a rellenar como juez, a la selección de los problemas, a las categorías seleccionadas, y a otras sugerencias.

En relación a la selección de problemas, esta es muy completa, y abarca ampliamente y desde diferentes aspectos los contenidos detallados en el archivo de la problemática, que me has enviado. A pesar de eso, realizaré algunos comentarios sobre contenidos que no he conseguido identificar, y que si se trabajan en el currículum español de esas edades, algunos casos de forma directa y otros de forma tangencial, pero que es bueno que conozcan los profesores. Estos se refieren a las gráficas seleccionadas, a la noción de aleatoriedad, variación, noción frecuencial de la probabilidad.

a. Gráficas, existe una amplia selección de gráficos a interpretar, y comparar, pero no he visto ningún gráfico de cajas. Estos gráficos, al menos en España, tradicionalmente no se utilizan, aunque si en el ámbito anglosajón. Para mi tienen la ventaja de permitir comparar y analizar el significado de variación, que no lo permiten otros gráficos, y que veo que ha sido un aspecto que has establecido en diferentes ejercicios. En este sentido son muy interesantes los trabajos de Pfannkuch (2006).
b. En particular, tangencialmente he visto que en algún ejercicio haces referencia a la variación, pero no hay ninguna actividad directamente relacionada con este aspecto característico de los datos estadísticos. En este sentido me surgía la duda de si el bloque de datos y azar, consideraba también datos determinados por relaciones funcionales. Si es así creo que el planteamiento de algún ejercicio que analizase el significado de la variación de los datos estadísticos sería muy interesante.
c. Este mismo problema lo tengo con la noción de aleatoriedad. Aunque tradicionalmente en nuestros currículos se incluye sólo la noción de probabilidad, creo que también es interesante que haya algún ejercicio que permita distinguir qué situaciones son aleatorias o no, ya que en este caso existen diferentes conceptualizaciones de la misma, y que serán básicas para la comprensión de las argumentaciones de los profesores sobre la equiprobabilidad o la multiplicidad de posibilidades. En este sentido se pueden usar los trabajos de Konold y otros (1991). Un posible problema, podría ser el propuesto Konold y otros (1991).
d. La selección de ejercicios de probabilidad se refieren a argumentaciones basadas en la proporcionalidad, en las posibilidades de casos posibles y probables, y en la equiposibilidad del suceso. Según la clasificación de Cardeñoso, Azcárate, Serradó (2004), los profesores ante situaciones de incertidumbre cuando tienen que argumentar se basan en cinco dimensiones: contingencia, laplaciana, frecuencial, equiprobabilidad y experiencial. En la selección de ejercicios no existe ningún problema que haga referencia a la categoría frecuencial (estimativas de la cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información recibida). Quizás sería interesante plantear un problema que se refiera a esta situación, ya que será clave para que profesores y estudiantes posteriormente puedan realizar un tratamiento adecuado del azar (Shaugnessy, 1992), y puedan relacionar la estadística y la probabilidad mediante la inferencia de largas cantidades de datos.

> Asociada a esta noción frecuencial de la probabilidad pueden aparecer obstáculos didácticos en el aprendizaje de las mismas (Serradó, Cardeñoso, Azcárate, 2005), relacionados con el heurístico de la representatividad (Tversky y Kahnema, 1992).
> Por lo tanto, considero que sería interesante plantear algún tipo de ejercicio relacionado con los heurísticos, falacias asociadas a la noción de azar y probabilidad, como la falacia del jugador, el "outcome approach" o el heurístico de la representatividad.

La mayoría de ellos surgen en los procesos de enseñanza aprendizaje, y en los libros de texto, como producto de las transposiciones didácticas que realizan los profesores, o los autores de los libros de texto. Estas transposiciones son independientes del momento historio, o del proceso de construcción del conocimiento, pero si dependen de las tendencias de los modelos didácticos de los libros de texto (González Astudillo, 2002), o de los modelos de intervención de los profesores (Serradó, 2003).

En este sentido, me ha llamado la atención la distinción en la clasificación CRAC (Conocimiento del profesor en relación al Saber del alumno), que se especifiquen como categorías diferentes DIFI (Dificultades más frecuentes de los alumnos) y ERRO (Errores posibles de los alumnos). En nuestros estudios, ambas surgen como producto de las decisiones de intervención de los profesores. En los primeros niveles de desarrollo profesional (modelos tradicionales), se promueve la presentación de una estructura cerrada, jerarquizada y lineal del conocimiento que permite una intervención mínima del estudiante en el proceso de construcción del conocimiento, que viene dado por el profesor, y expresado a veces por parte del alumno como errores. En un intento de una participación más activa del estudiante, el profesor utiliza un conjunto amplio de fuentes de información (las ideas previas de los estudiantes, los obstáculos y dificultades) que serán el soporte para su enseñanza, en este tendencia intermedia de carácter innovador. Y en un nivel superior, las tendencias investigativas tendrán en cuenta estos obstáculos, dificultades, errores como generadores de los problemas de investigación para realizar por parte de los alumnos. El análisis exhaustivo de las respuestas de los alumnos en procesos de investigación favorecerá el desarrollo profesional del profesor y la construcción del conocimiento profesional práctico (Serradó, 2003; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Por lo tanto, desde nuestra perspectiva serían diferentes niveles de conocimiento profesional en relación del saber de los alumnos puestos en juego durante su intervención (planificación, desarrollo y evaluación).

Al igual que nosotros los últimos años, hemos estado estudiando las concepciones de los profesores sobre probabilidad, y su relación con el desarrollo profesional del profesor y la construcción de su conocimiento profesional, González Astudillo y Jesús Pinto lo han estado haciendo en el campo de la representación gráfica. Os adjunto también la referencia a dos de sus trabajos que os pueden interesar.

Ante todo, y para finalizar, aunque haya descrito una larga lista de aspectos y/o comentarios que me ha sugerido la selección, considero que esta es muy buena.

Azcárate, P. (1996). Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad. Granada, España: Editorial Comares

Cardeñoso, J.M., Azcárate, P. y Serrado. A. (2004). Dimensión Conceptual del Conocimiento Profesional en el ámbito probabilístico. *Actas del XXVIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Cádiz, España.

González Astudillo, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: Perspectiva histórica.* Disertación doctoral. Colección Vitor. Universidad de Salamanca.

González, T. & Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. *In Batanero, C., Burrill, G., Reading, C., & Rossman, A. (Eds.) (2008), Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI and IASE. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/*publications*.

Konold, C. y otros (1991). Nocives views on randomness. The thirteen Annual Meeting of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education, Blaclsburg, VA.

Pfannkuch, M (2006). Comparing box plot distributions: a teachers' reasoning. *Statistics Education Research Journal, 5(2), 27, 45, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj*

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudio de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación.* Disertación doctoral inédita. Salamanca (España): Universidad de Salamanca.

Serradó, A. (2003). *El tratamiento del azar en educación secundaria obligatoria*, Doctoral Dissertation, University Microfilms Incorporated's Proquest Digital Dissertations, Michigan. AAT 3126908 Number.

Serradó, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistente to teaching probability in compulsory education. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahía), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2005). Obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj*

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and directions. In

Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company

Nota de la Autora:

En la respuesta a estos comentarios, se señalan a la Dra. Serrado-Bayes los ítems que evalúan sesgos y heurísticas, y se le confirma la ausencia de la variación y los diagramas de caja en el currículo escolar básico chileno.

ANEXO 4

Instrumentos Evaluativos del CC de los Alumnos

del Nivel 4 y del Nivel 7: Formas A, B Y C

A

Mis Conocimientos de Datos y Azar – 4to

__Lee atentamente__ cada pregunta, y luego contesta __marcando la alternativa correcta__.

1. Juan pregunto a sus compañeros si tenian algun perro o gato de mascota. El marco con un ✓ las mascotas de cada uno, y recolectó la información siguiente:

Perros y gatos de mis compañeros		
Hector perro✓ o gato	Karla perro✓ o gato	Rocio perro✓ o gato✓
Matias perro o gato✓	Maria perro o gato	Diego perro o gato✓
Anita perro o gato	Keiko perro o gato✓	Consuelo perro✓ o gato
Tatiana perro✓ o gato	Fran perro o gato✓	Isabel perro✓ o gato
Juan perro o gato✓	Yanet perro✓ o gato✓	Seba perro✓ o gato

Para completar la tabla, Juan recibió la ayuda de unos amigos. **¿Cuál de estas ayuda es correcta?** Indica la alternativa que señale los valores del interior de esta tabla.

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato		
No tiene gato		

(a)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	8	7
No tiene gato	5	2

(b)

	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	2	5
No tiene gato	6	2

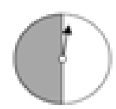
(c)

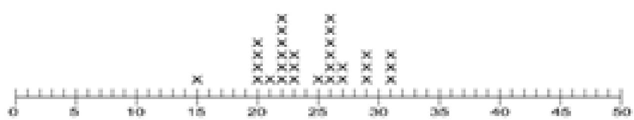
	Tiene perro	No tiene perro
Tiene gato	8	7
No tiene gato	8	2

(d) Otra

---

2. Un curso realizó el experimento de girar la ruleta como la de la derecha (50 veces por alumno). En la siguiente gráfica, cada alumno anotó con una cruz, el número de veces que cayó en la parte sombreada.





2.1 ¿Cuál es número menor de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 0 (b) 25 (c) 15 (d) 1

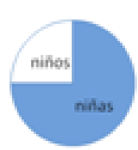
2.2 ¿Cuál es número mayor de veces que cayó en la parte sombreada?

(a) 50 (b) 22 (c) 26 (d) 31

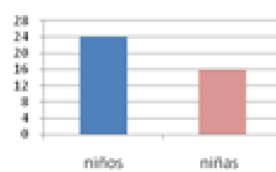
---

3. El curso A y el curso B tienen cada uno 40 estudiantes.

Curso A



Curso B



En el curso A hay más niñas que en el curso B.

¿Cuántas niñas más hay en el curso A que en el curso B?

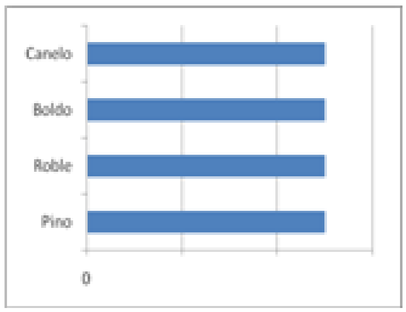
(a) 14 (b) 16 (c) 24 (d) 30

4. En un Parque Nacional se contaron cuatro tipos de árboles nativos chilenos.

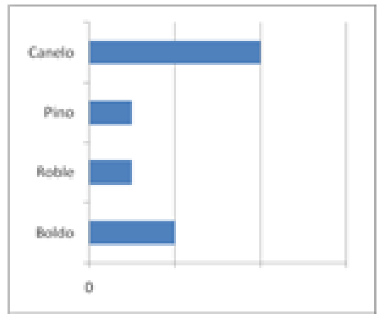
¿Cuál de los siguientes gráficos muestra correctamente la información de la tabla?

Tipo de Árbol	Número de árboles
Canelo	200
Pino	100
Roble	50
Boldo	50

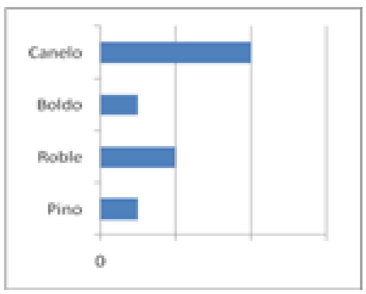
(a)



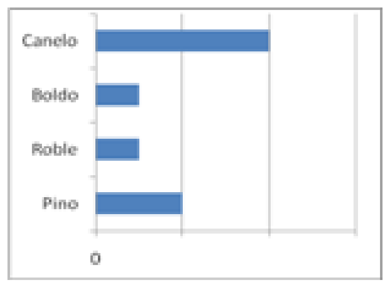
(b)



(c)



(d)

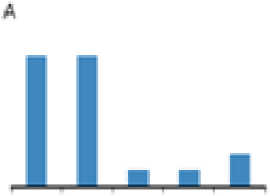


5. En 1000 Parques Nacionales se contaron la cantidad de robles plantados en cada uno. Los resultados fueron los siguientes:

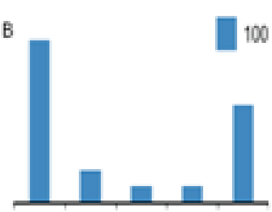
Cantidad de Robles	*Cantidad de Parques*
1	500
2	100
3	50
4	50
5 o más	300

¿Cuál es el gráfico que corresponde a la tabla?

A



B



(a) El gráfico A (b) El gráfico B (c) Ambos (d) Otro gráfico

B

Mis Conocimientos de Datos y Azar – 4to

Lee atentamente cada pregunta, y luego contesta marcando la alternativa correcta.

1. El pictograma muestra la información de Pedidos de libros a la Biblioteca de un colegio.

Tabla A	
Cuentos	300
Poesías	600
Teatro	400
Historieta	700
Informativos	900

Tabla B	
Cuentos	30
Poesías	60
Teatro	40
Historieta	70
Informativos	90

Tabla C	
Cuentos	3
Poesías	6
Teatro	4
Historieta	7
Informativos	9

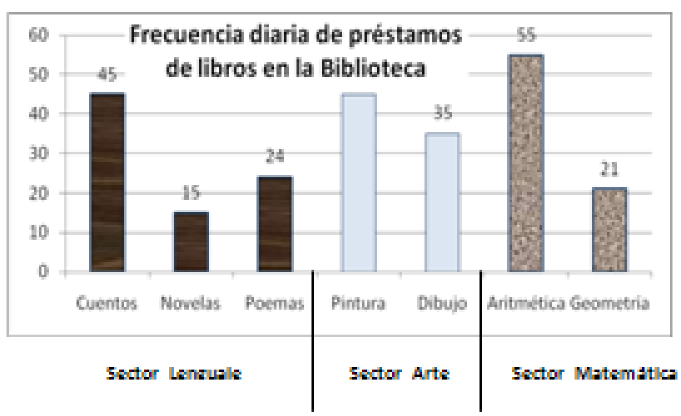
1.1 ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a la información que entrega el pictograma?

(a) Tabla A (b) Tabla B (c) Tabla C (d) Ninguna

1.2 Si la bibliotecaria debe comprar nuevos libros, ¿Qué representación le resulta más adecuada para realizar la compra?

(a) pictograma (b) tabla (c) ambas (d) no sé

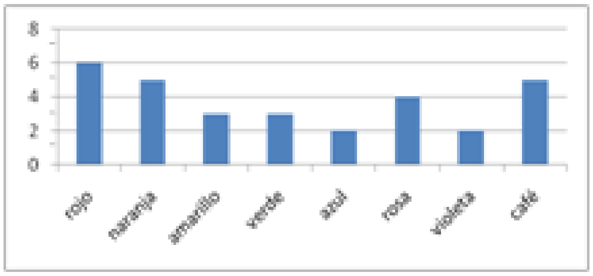
2. Observa cuidadosamente el gráfico y responde marcando la alternativa correcta,



¿Cuál es el sector que tiene más préstamos?

(a) Sector Lenguaje (b) Sector Arte (c) Sector Matemática (d) Todos los sectores

3. Hay una bolsa con dulces de colores. El numero de dulces de cada color se muestra en el siguiente gráfico.



3.1. ¿Cuántos dulces naranja hay?

(a) 6 (b) 4 (c) 4,5 (d) 5

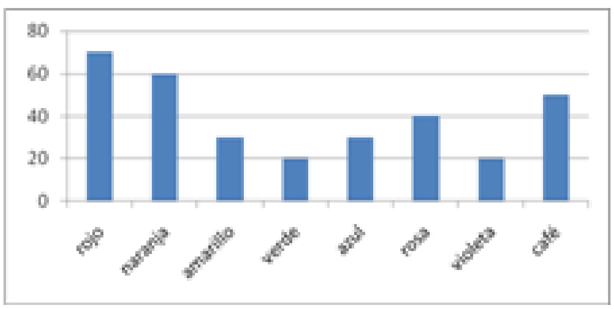
3.2. ¿De qué colores hay exactamente 2 dulces?

(a) amarillo y verde (b) verde y azul (c) azul y violeta (d) naranja y violeta

3.3. Para igualar la cantidad de dulces azules y dulces rojos. ¿Cuántos dulces azules faltaría colocar en la bolsa?

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) otra cantidad

4. Hay una bolsa mas grande con dulces de colores. El numero de dulces de cada color se muestra en el siguiente gráfico.



4.1 ¿Cuántos dulces en total indican las barras de dulces de color rosa y violeta?

(a) 40 (b) 60 (c) 20 (d) otra cantidad

4.2 ¿Cuántos dulces café hay?

(a) 60 (b) 40 (c) 45 (d) 50

C

Mis Conocimientos de Datos y Azar – 4to

Lee atentamente cada pregunta, y luego contesta marcando la alternativa correcta.

Como llegan los estudiantes a la escuela en el día de hoy.

1. Observa el gráfico de arriba y responde,

1.1 ¿Cuántos estudiantes llegan caminando a la escuela?

(a) 4 (b) 7 (c) 3 (d) No se sabe

1.2 Observa los estudiantes que llegan en bus, y los que llegan en auto. ¿Cuántos estudiantes más llegan en Bus que en Auto?

(a) 9 (b) 5 (c) 4 (d) No se sabe

1.3 ¿Debería ser el mismo gráfico para todos los días?

(a) Si (b) No Porque, ___________________________________

1.4 Alguien nuevo llega al curso y viene en auto a la escuela. ¿Esta persona es niña o niño? ¿Cómo podrías saberlo?

(a) Posiblemente Niña
(b) Posiblemente Niño

Porque, ___________________________________

1.5 ¿Qué nos dice la fila del Tren?

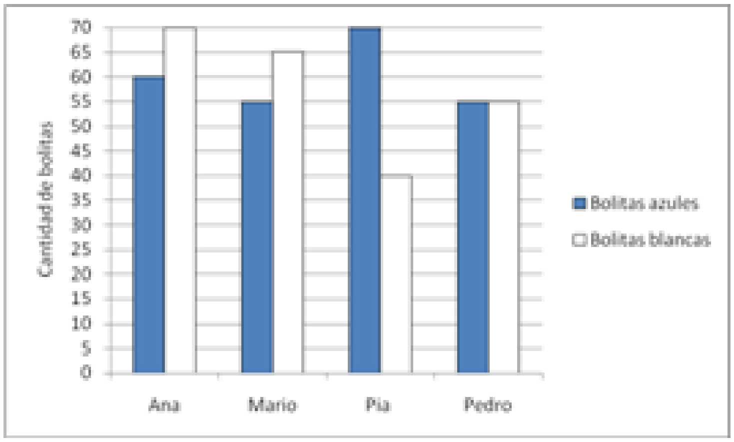
(a) No hay tren (b) Que se puede llegar a la escuela por tren

(c) Me gusta el tren (d) Nadie llega en tren

1.6 Tom no está en la escuela hoy día. ¿Cómo piensas que va a llegar a la escuela mañana? ¿Por qué?

(a) En bicicleta, pues la mayoría de los niños llega en bicicleta a la escuela.
(b) En tren, pues no hay nada en la fila del tren, así que debe ser Tom.
(c) En bus, pues hay una regularidad por cada niño, y el siguiente es niño.
(d) Posiblemente en bus, como la mayoría de los niños que llegaron hoy.

2. Cuatro amigos coleccionan bolitas de color azul y bolitas de color blanco. Las bolitas de color de cada uno se muestran en el gráfico,



2.1 ¿Qué amigos tienen <u>en total</u> la misma cantidad de bolitas?

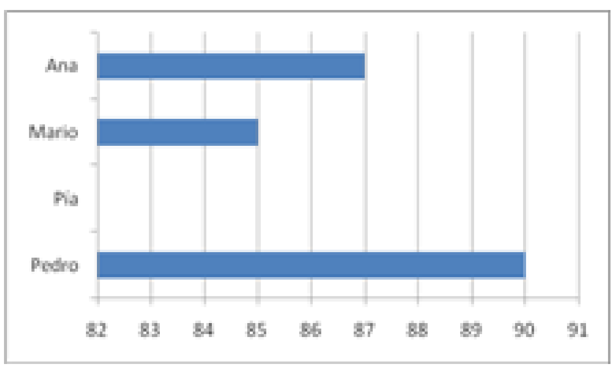
(a) Ana y Pía
(b) Ana y Mario
(c) Mario y Pedro
(d) Pedro y Pía

2.2 ¿Cuál de las afirmaciones es correcta?

(a) Hay más bolitas blancas que azules
(b) El total de bolitas azules y blancas es 130
(c) Hay más bolitas azules que blancas
(d) Mario tiene más bolitas azules y blancas que Ana

2.3 Otro día, los cuatro amigos contaron la cantidad de bolitas que tenía cada uno. Pedro tuvo más bolitas y obtuvo el primer lugar. Pía quedó en tercer lugar.

En el siguiente gráfico, falta la barra que muestre el total de bolitas de Pía.



¿Cuántas bolitas indicaría la barra de Pía?

(a) 89 (b) 88 (c) 86 (d) 85

ANEXO 5

Mapa de progreso de Datos y Azar.

Mapa de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. (MINEDUC, 2009)

Nivel 7 Sobresaliente	Usa modelos probabilísticos para resolver problemas en contextos de incerteza, relacionando con profundidad y autonomía elementos de estadística y probabilidad. Utiliza con propiedad recursos digitales para realizar análisis de datos, graficar, obtener descriptores de las muestras y hacer inferencias. Evalúa información estadística haciendo uso de criterios aplicados a los procedimientos utilizados y la representatividad de la muestra. Realiza inferencias sobre los parámetros de una población en estudio, a partir del análisis de los estadísticos de una muestra tomada. Comprende las propiedades de probabilidad y las aplica en la resolución de problemas en una amplia gama de situaciones.
Nivel 6	Produce información aplicando la distribución normal y la binomial. Analiza críticamente información estadística, argumentando acerca de la representatividad de las muestras, su tamaño y los niveles de confianza reportados. Estima parámetros poblacionales, utilizando intervalos de confianza. Comprende que al seleccionar muestras de una población la distribución de sus valores medios es aproximadamente normal, con una media igual a la media poblacional, y que esa aproximación mejora a medida que aumenta el tamaño de las muestras. Verifica, haciendo uso de recursos digitales, la proximidad entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias en experimentos aleatorios discretos. Realiza inferencias a partir de una muestra aleatoria, considerando el error asociado al tamaño de ella. Resuelve problemas aplicando el cálculo de probabilidad condicional.
Nivel 5	Organiza información a través de histogramas, polígonos de frecuencia y gráficos de frecuencia acumulada. Extrae e interpreta información haciendo uso de medidas de dispersión y de posición. Compara dos o más conjuntos de datos usando medidas de dispersión y posición. Comprende que al tomar mayor cantidad de muestras de igual tamaño, desde una población finita, el promedio de las medias aritméticas muestrales se aproxima a la media de la población. Asigna probabilidades mediante el modelo de Laplace o bien las frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del experimento. Resuelve problemas acerca del cálculo de probabilidades, usando diagramas de árbol, técnicas combinatorias y aplicando propiedades de la suma y producto de las probabilidades.
Nivel 4	Organiza datos en gráficos y tablas, reconociendo las aplicaciones, ventajas y desventajas de distintos tipos de representación. Extrae e interpreta información desde tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Comprende los conceptos de representatividad y aleatoriedad de una muestra y sus efectos en conclusiones e inferencias acerca de una población determinada. Comprende que a través del modelo de Laplace es posible predecir el valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento simple, sin realizar el experimento aleatorio. Resuelve problemas simples de probabilidades, conjetura y verifica resultados usando el modelo de Laplace y también las frecuencias relativas.
Nivel 3	Reconoce aquellas variables que aportan información relevante para resolver un problema y organiza datos en gráficos de línea, circulares y barras múltiples. Extrae información respecto de situaciones o fenómenos presentados en los gráficos anteriores y calcula medidas de tendencia central. Comprende los conceptos de población y muestra y la conveniencia de seleccionar muestras al realizar estudios para caracterizar poblaciones. Evalúa la posibilidad de ocurrencia de un evento en contextos cotidianos como posible, imposible, probable o seguro, a partir de su experiencia y la observación de regularidades en experimentos aleatorios simples. Conjetura acerca de las tendencias que se desprenden desde un gráfico, desde la lectura de medidas de tendencia central o de los resultados de un experimento aleatorio simple, justificando en base a la información disponible.
Nivel 2	Organiza datos simples relativos a situaciones o fenómenos diversos, en gráficos de barras simples. Extrae información respecto de un fenómeno o situación desde tablas y gráficos de barras simples. Saca conclusiones y verifica afirmaciones que requieren integrar los datos disponibles, o bien realiza algunas operaciones simples. Justifica dando cuenta del procedimiento utilizado.
Nivel 1	Organiza datos simples acerca de objetos, personas o animales en tablas simples, de doble entrada y pictogramas. Extrae información desde tablas y pictogramas referidos a contextos significativos del entorno escolar y familiar. Realiza comparaciones simples con datos extraídos desde tablas y pictogramas y justifica sus conclusiones en base a la información entregada.

ANEXO 6

RELACIÓN ENTRE APRENDIZAJES ESPERADOS, OBJETIVOS FUNDAMENTALES (OF) Y CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS (CMO) (NIVEL 5 AL NIVEL 10, de 5to EB a I EM). (MINEDUC, 2009).

APRENDIZAJES ESPERADOS 5to	OF	CMO
1. Genera nueva información mediante la interpretación y comparación de datos organizados en gráficos de líneas y de barras múltiples.	6	17
2. Representa la relación existente entre variables mediante gráficos de barras múltiples y de líneas construidos manualmente o mediante herramientas tecnológicas.	6	18
3. Conjetura respecto al comportamiento de variables y verifica la validez de dichas conjeturas mediante el uso de gráficos de línea o de barras múltiples.	6	19
4. Describe cualitativamente, mediante un lenguaje de uso común, la probabilidad de ocurrencia de eventos en situaciones lúdicas y cotidianas, y argumenta acerca de la posibilidad de ocurrencia de estos.	7	20 21
APRENDIZAJES ESPERADOS 6to	**OF**	**CMO**
1. Resuelve problemas que impliquen interpretar información presentada en gráficos circulares.	8	15
2. Representa datos obtenidos desde diversas fuentes, en gráficos circulares utilizando herramientas tecnológicas o en forma manual.	8	15
3. Distingue los conceptos de población y muestra, y argumenta acerca de la necesidad de tomar muestras en la realización de estudios o encuestas que involucran un gran número de casos.	9	16
4. Interpreta y discute la información que entregan diferentes medidas de tendencia central en diversos contextos, considerando el tipo de datos.	10	17
5. Calcula medidas de tendencia central en diversas situaciones y discute acerca de la pertinencia de su cálculo según el tipo de datos.	10	17
6. Estima la probabilidad de ocurrencia de eventos, mediante la identificación de patrones en el comportamiento de resultados de experimentos aleatorios en contextos lúdicos.	11	18
APRENDIZAJES ESPERADOS 7mo	**OF**	**CMO**
1. Analiza información presente en diversos tipos de tablas y gráficos.	10	17
2. Selecciona formas de organización y representación de datos de acuerdo al tipo de análisis que se quiere realizar.	10	18
3. Reconoce que la naturaleza y el método de selección de muestras inciden en el estudio de una población.	11	19 20
4. Predice acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples.	12	21

APRENDIZAJES ESPERADOS 8vo	OF	CMO
1. Interpreta información a partir de tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos y utiliza este tipo de representación para organizar datos provenientes de diversas fuentes.	7	16 17
2. Interpreta y produce información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de tendencia central, ampliando al caso de datos agrupados en intervalos.	8	17
3. Comprende el concepto de aleatoriedad en el uso de muestras y su importancia en la realización de inferencias.	9	18 19
4. Asigna probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y las contrasta con resultados experimentales.	10	20 21 22

APRENDIZAJES ESPERADOS I°	OF	CMO
1. Interpreta información, en contextos diversos, mediante gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos.	8	17
2. Produce información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos.	8	18
3. Obtiene la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y lo aplica al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.	9	20 21 23
4. Comprende la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.	10	19 22
5. Interpreta información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	11	17 19
6. Produce información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	11	19
7. Selecciona la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.	12	20 23

ANEXO 7

Tabla Resumen de los Estudios Realizados.

Estudios	Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
1	Especificación del contenido de la variable	Ajuste curricular chileno 2009, propuesta de estándares de Datos y Azar 2009, textos escolares del ciclo básico y medio, 2009 y 2010. Literatura especializada internacional sobre estadística y probabiidad. Registros de cuadernos de alumnos de 4to y 7mo E.B.	Libros, propuesta de estándares (material de uso restringido). Textos escolares del MINEDUC.	Análisis de Contenido	Primeras especificaciones de la variable
2	Elaboración de un primer banco de ítems	Pruebas PISA 2003, TIMSS 2007, SIMCE 2008, SERCE 2009 y publicaciones del tema.	Ítems liberados de las pruebas internacionales. Ítems de estadística y/o probabilidad investigados en publicaciones internacionales, (60 ítems).	Análisis de Contenido	Tablas de especificaciones
3	Pruebas pilotos de los ítems	30 profesores en ejercicio en ciclo básico (estudio exploratorio)	15 ítems elegidos desde la literatura	Estimación clásica de los índices de dificultad. Respuestas a los distractores: medidas de tendencia central. Comportamiento de los sujetos en la aplicación del test.	Características de los ítems y su comprensión lectora. Eliminación de algunos ítems y modificación de otros.
4	Elaboración y modificación del banco de ítems	Modificaciones a ítems existentes y creación de nuevos ítems basados en Pruebas PISA 2003, TIMSS 2007, SIMCE 2008, SERCE 2009 y publicaciones del tema	Ítems creados y/o modificados de estadística y/o probabilidad	Respuestas a los distractores: medidas de tendencia central. Comportamiento de los sujetos en la aplicación del test.	Tablas de especificaciones

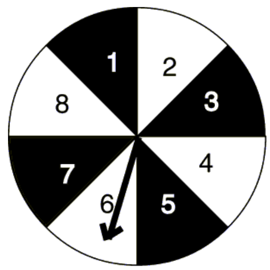
Estudios	Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
7	Juicio de expertos	2 expertos, (1 estadístico y 1 didácta)	20 ítems con los contenidos curriculares y aprox. 25 subítems del conocimiento pedagógico del contenido	Análisis de la redacción (claridad y precisión) considerando el lenguaje y los códigos propios de cada núcleo temático. Análisis de las alternativas, e idoneidad de los distractores.	Cambios de distractores y de redacción en algunos ítems.
5	Pruebas pilotos de los ítems	57 alumnos de nivel 4 (27) y nivel 7 (30)	22 ítems con los contenidos curriculares	Contabilización de respuestas correctas, parcialmente correctas y en blanco. Comportamiento de los sujetos en la aplicación del test.	Cambios en la enunciación de preguntas. Modificaciones de distractores, de situaciones e integración y cambios de contextos.
6	Prueba piloto de los ítems abiertos	Entrevista semiestructurada a una profesora de primer ciclo	2 ítems abiertos del test con material fotocopiado para el profesor	Análisis de las respuestas y clarificaciones	Clarificar las tareas que demanda el ítem. Proporcionar instrucciones claras para las preguntas abiertas.
8	Pruebas pilotos de los ítems	13 alumnos con talento de nivel 7 y 8	19 ítems con 31 subítems en total correspondientes al conocimiento del contenido	Contabilización de respuestas correctas e incorrectas, tiempo empleado. Coeficiente de confiabilidad de Kuder-Richarson 20.	Verificación de la comprensión en los cambios en la enunciación de preguntas. Características sicométricas.
9	Juicio de expertos	8 expertos	20 ítems que incluyen aprox. 25 subítems del conocimiento pedagógico del contenido	Análisis los aspectos que mide el CPC, Enseñanza y CRAC. Comentarios cualitativos para la mejora de material. Puntuación en concordancia ítem – contenido. Concordancia entre jueces	Cuestionario final con validez de contenido cuyos ítems se eligieron según grado de acuerdo jueces. Comentarios cualitativos de concordancia con la selección de los ítems.
10	Análisis a priori	Autora y experto estadístico	Análisis de los 20 ítems y subítems	Análisis de las posibles respuestas correctas e incorrectas a los diferentes ítems identificando los conceptos y propiedades necesarios para su resolución, así como los posibles errores conceptuales que llevarían a una solución errónea	Evidencias de la relevancia y representatividad de los ítems mediante la alta valoración y grado de acuerdo del juez de contenido ha concedido a la idoneidad de los ítems finalmente seleccionados

ANEXO 8

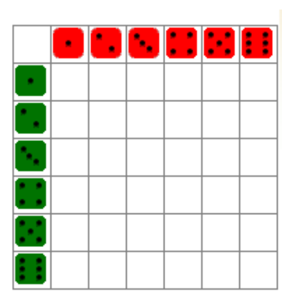
Propuesta de dos ítems para evaluar CPC sobre Medio Didáctico

1) Ud. quiere introducir el concepto de Equiprobabilidad, para ello dibujaría preferentemente en su pizarrón (o lo llevaría dibujado en papel),

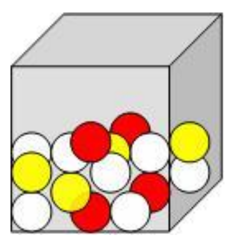
a) la siguiente ruleta



b) dos dados y la completación de la tabla de resultados del lanzamiento de los dados



c) la siguiente caja con bolitas de colores



d) unas o más monedas

CORRECTA d) 2 puntos (comienza con dos sucesos)

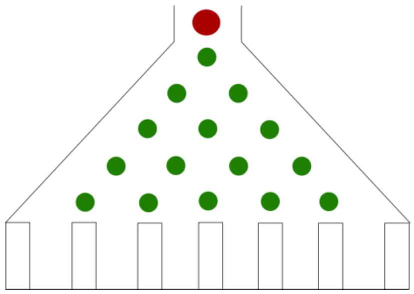
a) 1 punto (tiene más de 8 sucesos)

b) 0 puntos, preferible para datos no equiprobables

c) 1 punto (depende de la diversidad de colores y cantidad de bolitas)

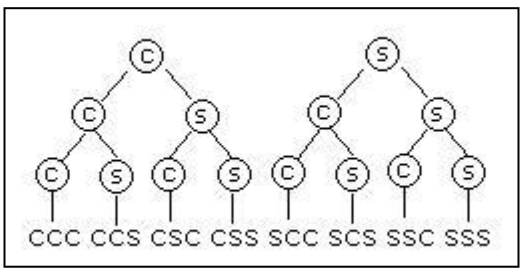
2) En una segunda sesión sobre sucesos equiprobables, Ud. idealmente utilizaría por ejemplo con el experimento de lanzar una o más monedas equilibradas:

a) El aparato de Galton y el triángulo de Pascal



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

b) La tabla de frecuencias y diagrama de árbol asociado al experimento



Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa

c) Aparato de Galton, triángulo de Pascal, tabla de frecuencias, diagrama de árbol y dibujaría un gráfico de frecuencias.

d) Ocuparía programas de simulación en los computadores u otra TICs de la red.

CORRECTA c) 2 puntos, muestra experticia en el tema

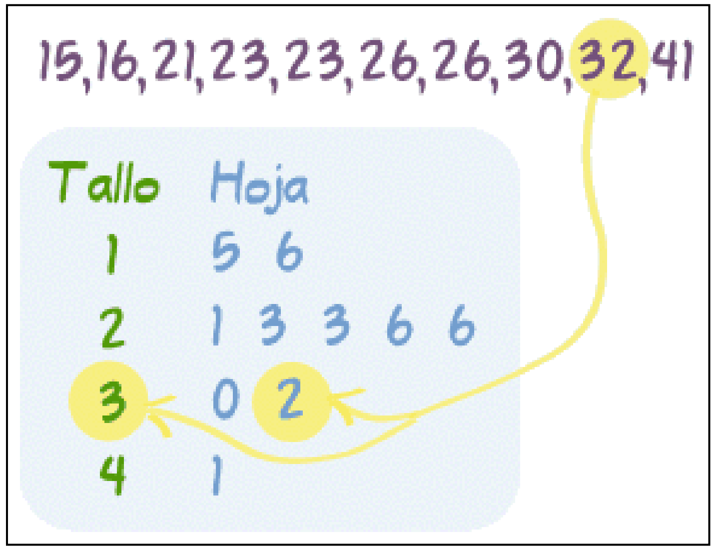
a) 1 punto, falta determinar los sucesos equiprobables con el árbol y determinar las probabilidades mediante las frecuencias experimentales o teóricas de la tabla de frecuencia

b) 1 puntos, falta o Galton o Triángulo de Pascal que es en nexo con las probabilidades

d) 0 punto, es una posibilidad pero en una segunda sesión no es ideal para el lanzamiento de una o más monedas y no reúne más posibilidades.

ANEXO 9

Diagrama de Tallo y Hojas (steam and leaf)



Propuesto por Tukey en 1977, en este diagrama cada valor de datos se representa en un tallo (el primer dígito) y una "hoja" (normalmente el último dígito). Por ejemplo "32" se separa en "3" (tallo) y "2" (hoja). Así se utilizan los dígitos de los valores de los mismos datos, en vez de simplemente encerrar áreas.

Los valores del "tallo" se escriben en orden hacia abajo y los valores "hoja" van a la derecha (o izquierda) del los valores tallo. El "tallo" es usado para agrupar los puntajes y cada "hoja" indica los puntajes individuales dentro de cada grupo.

En el diagrama "tallo y hojas" cada dato representa su valor y, a la vez, ocupa un espacio de forma que obtenemos simultáneamente la presentación de los datos y el perfil de una distribución en una variable.

Este diagrama permite ver el todo y advertir aspectos como:
- Cuán simétricos son los datos.
- Cuán dispersos están los valores.
- La aparición de valores inesperadamente más frecuentes.
- Si algunos valores están alejados del resto.
- Si hay concentraciones de valores.
- Si hay grupos separados.

Entre sus ventajas más relevantes están ser más fácil de construir a mano, y facilitar el ordenamiento de los datos; permitiendo, por lo tanto, hallar la mediana y otras medidas resumen basadas en los datos ordenados.

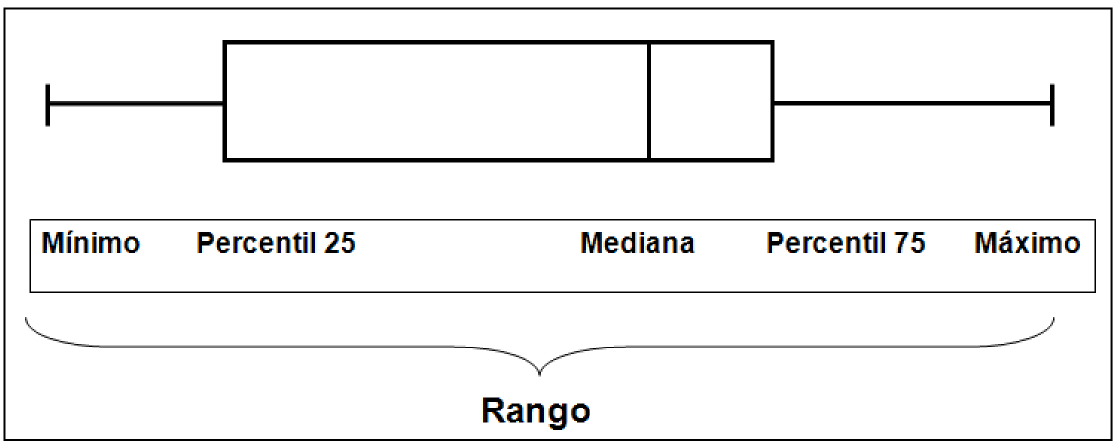
Gráfico de Caja y Bigotes (Box and Whiskers, ó BoxPlot)

También propuesto por Tukey, es una presentación visual que describe varias características importantes respecto a la distribución de los datos en la muestra, al mismo tiempo, tales como la dispersión y simetría. Esto se complementa, de manera cualitativa, con los resultados cuantitativos obtenidos a través de los estadísticos de la muestra.

Adicionalmente un Diagrama de Cajas permite determinar si la muestra tiene elementos "outliers" , valores atípicos, y si presenta un sesgo a la izquierda a la derecha o izquierda.

Para su realización se representan **los tres cuartiles** y los valores **mínimo** y **máximo** de los datos, sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

De la



mediana podemos determinar la tendencia central. De la longitud de la caja podemos ver la dispersión o variabilidad de las observaciones. Si la mediana no está en el centro de la caja se sabe que los valores observados son sesgados. Si la mediana está más cerca de la base de la caja que del extremo superior, es sesgada a la derecha. Si la mediana está más cerca del extremo superior de la caja que de la base, es sesgada a la izquierda.

Los gráficos de cajas son particularmente útiles para comparar la distribución de datos de varios grupos.