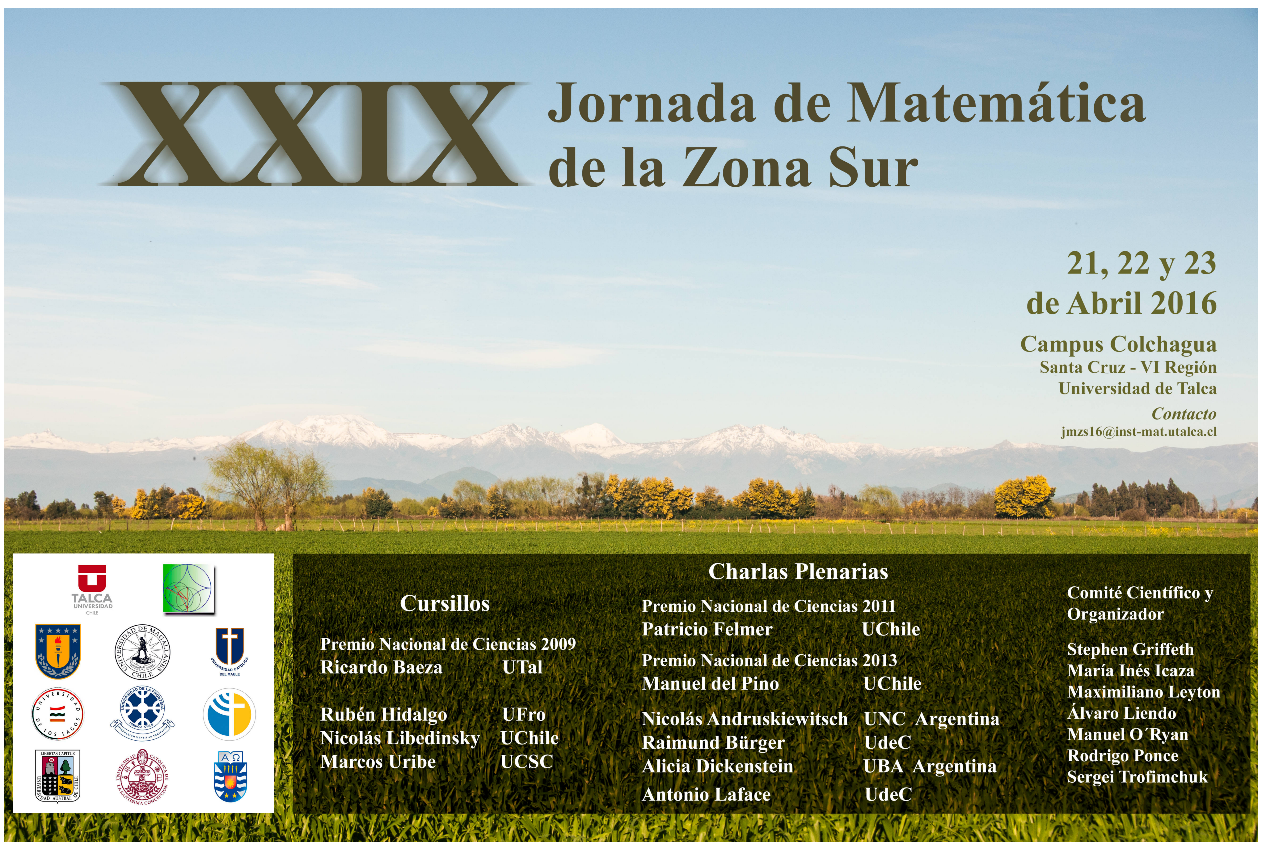
XXIX Jornada de Matemática de la Zona Sur

Universidad de Talca

21, 22 y 23 de Abril de 2016, Santa Cruz, VI Región, Chile

Actas de la Jornada



Índice

Plenarias

Cursillos

Sesión de álgebra y teoría de números

Sesión de análisis y Ecuaciones Diferenciales

Sesión de biomatemática

Sesión de educación matemática

Sesión de geometría

Sesión de matemática aplicada y análisis numérico

Sesión de optimización y teoría de juegos

Sesión de probabilidad y estadistica

Sesión de Sistemas dinámicos

Una experiencia piloto en el Complejo Educacional La Granja. Desarrollando habilidades del pensamiento matemático

Pamela Alarcón Chávez y Ciro González Mallo
Carrera de Pedagogía Media en Matemá tica de la Facultad de Educació n
Universidad Católica de Temuco
Temuco, Chile
y
Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas
Universidad Católica de Temuco
Temuco, Chile

Del permanente contacto existente entre la Carrera de Pedagogía Media en Matemática UCT y distintos liceos de la Región de la Araucanía a través de sus Prácticas Pedagógicas Tempranas y Prácticas Finales, surge la presentación y aprobación de un Proyecto Interno de Pasantías Docentes en Centros Educativos de la Facultad de Educación, un semestre de duración e implementado durante el segundo semestre de 2015.

A través del presente trabajo, se muestra el desarrollo y resultados obtenidos en el Proyecto, cuyo objetivo principal es "fortalecer el vínculo entre la Universidad Católica de Temuco y uno de los Centros Educativos que colaboran en la formación inicial de profesores, a través de la realización actividades conjuntas que fomenten en los estudiantes del establecimiento educativo el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático".

Durante el desarrollo del Proyecto, se establece una coordinación entre el equipo de docentes de la Carrera de Pedagogía Media en Matemática (académicos de la Facultad de Educación y del Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas) y los profesores de matemática del Complejo Educacional La Granja, estableciendo las necesidades de ayuda técnica de acuerdo a la realidad escolar en la cual se encuentran inmersos. Se planifican e implementan acciones que contribuyen al fortalecimiento profesional de los profesores de matemática del Complejo Educacional La Granja, en relación al desarrollo de habilidades del pensamiento matemático (como la resolución de problemas, las habilidades de comunicación y argumentación, las de representación, y las de modelamiento matemático), se implementan de manera conjunta estrategias didácticas que permitan a sus estudiantes el desarrollo de estas habilidades que propicien un impacto positivo en sus aprendizajes, y se analizan las implementaciones realizadas con el propósito de mejorar las prácticas educativas a nivel de aula.

Trabajo realizado en conjunto con:
Valeria Carrasco Zúñiga Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile.
Teresa Sanhueza Vega Carrera de Pedagogía Media en Matemática, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile.

Referencias

[1] Bruner, 1961, *The act of discovery*, Harvard Educational Review.

[2] George Polya, 1945 *How to solve it*

[3] Isoda, M. & Mena, A., 2007 *El estudio de clases japonés en matemáticas.* Editorial Universitaria Valparaíso, Valparaíso.

[4] Ministerio de educación, 2013 *Bases curriculares de Matemáticas vigentes.* Decreto 614 de 2013.

[5] NCTM, 2003, pp64 *Principios y Estándares para la educación matemática.*

Procesos cognitivos en el aprendizaje de la geometría. Visualización y razonamiento

María Aravena Díaz[44]
Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática y Estadística (CIEMAE) Facultad de Ciencias Básicas Universidad Católica del Maule.

La investigación que se presenta fue financiada el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1090617. Se realizó un experimento en el área de la geometría, en segundo año de educación media de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Para el diseño de la propuesta y análisis de la actividad geométrica se tomó como referente el modelo teórico de Duval (1998) y en particular las propuestas sobre visualización, razonamiento y construcción de los objetos geométricos (Vinner, 1991; Hershkowitz, 1990; Vinner y Hershkowitz, 1983; Owens , 1999; Duval, 1998; Presmeg, 2006; Torregrosa y Quesada, 2007). Se consideró importante la caracterización que realizan de los procesos de visualización y razonamiento, al igual que el estudio de su coordinación como puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo para resolver problemas geométricos (Duval, 1998, Prior y Torregrosa, 2013; Clemente y Llinares; 2015). El estudio fue de tipo experimental con pre-prueba, post- prueba y grupo control. El enfoque metodológico fue de corte cuantitativo, mediante un análisis de contenido. Se levantaron categorías de análisis siguiendo la propuesta de Torregrosa y Quezada (2007): (1) visualización con las subcategorías: aprehensión discursiva, acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas y aprehensión operativa, producida cuando el alumno lleva a cabo alguna modificación en la configuración inicial para resolver un problema geométrico; (2) razonamiento, mediante las subcategorías: proceso configural, que se identifica con la aprehensión operativa de cambio figural o de reconfiguración; proceso discursivo natural, mediante la descripción, explicación y argumentación y proceso discursivo teórico, que se caracteriza por un desarrollo del discurso mediante la deducción; (3) construcción del objeto geométrico, hace referencia a la forma cómo los estudiantes construyen el concepto geométrico. Aquí se analiza la interacción entre diferentes representaciones del objeto para su formación, el uso del pensamiento divergente que conduce a una conjetura y a su verificación, y la coordinación entre la habilidad de visualización y razonamiento. Para analizar las diferencias entre ambos grupos se utilizó la prueba T-student para muestra independientes. Los instrumentos fueron validados mediante el alfa de Cronbach, siendo superiores a 0,75. Para la selección de la muestra se utilizó un muestreo por conglomerados con arranque aleatorio y probabilidad proporcional quedando constituida por 615 estudiantes. A nivel de resultados se pudo constatar que en el inicio, los alumnos, presentan dificultades y obstáculos en asociar propiedades a las figuras geométricas y en la utilización de los diferentes registros de representación, reconocer definiciones o iniciar procesos deductivos y argumentativos. Al final de la experiencia las diferencias son altamente significativas, a favor del postest, asociando propiedades matemáticas a la representación de las figuras, argumentación y comunicación de conjeturas, procesos y resultados en la resolución de problemas geométricos. Sin embargo, se sigue manifestando, en ambos grupos, dificultades en los procesos de demostración tanto informal como formal.

[44]Parcialmente financiado por FONDECYT 1090617

Referencias

[1] Aravena, M; Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (16) 2, 139-178

[2] Aravena, D. M.; Gutiérrez, A..; Jaime A. (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. Revista Enseñanza de las Ciencias, 34.1 (2016): 107-128

[3] Clemente, F. y Llinares, S. (2015) Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. Enseñanza de las ciencias, 33.1 (2015): 9-27

[4] Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana y V.Villani (Eds.), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21stCentury (pp. 37-51).Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[5] Gray, E. (1999). Spatial strategies and visualization. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd International Conference of the Psychology for Mathematics Education (Vol.1, pp. 235-242) Haifa, Israel: University of Technion.

[6] Harel, G.: Sowder, L. (1998). Students´ Proof Schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinski; A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), Research on Collegiate Mathematics Education (Vol. 7, pp. 234-283). USA: American Mathematical Society.

[7] Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning, In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd International Conference of the Psychology for Mathematics Education (Vol. 1, pp. 220-234). Haifa, Israel: University of Technion. Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp.210-213). UK: Sense Publishers.

[9] Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 83(1), 20-25.

[10] Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), Advanced Mathematical Thinking. Mathematics. Education Library (pp. 65-79). Cambridge: Board.

[11] Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2), 275-300.

[12] Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), pp. 327-340.

[13] Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16(3), pp. 339-368.

Dificultades de comprensión del modelo de probabilidad binomial de profesores de matemática

Noemí Cid Chandía[45]
Magíster en Didáctica de la Matemática
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Concepción, Chile

Actualmente, la distribución binomial forma parte del currículo de estadística de la educación media debido a la riqueza de conceptos relacionados, las múltiples situaciones de tipo binomial presente en la vida cotidiana y su modelación en aplicaciones de la ciencias básicas y ciencias de la ingeniería. Es un tópico de la estadística que presenta dificultades de comprensión para los estudiantes de bachillerato, profesores en formación y estudiantes universitarios [1]. Como primera etapa, de un estudio más completo (vinculado al proyecto de investigación DIN 03/2015), analizamos la comprensión teórica y práctica acerca del modelo de probabilidad binomial alcanzada por un grupo de 46 profesores en ejercicio y en formación matemática de la octava región de Chile. Al finalizar la instrucción sobre el tema se aplicó un cuestionario de seis ítems de problemas de resolución algebraica y con apoyo computacional en el aula y laboratorio de computación. Los resultados indican, en ambos grupos, que no comprenden el efecto de la variación del número de ensayos Bernoulli en el cálculo de probabilidad binomial. Los futuros profesores responden mejor a expresiones algebraicas. El uso de dispositivos computacionales permitió a los profesores calcular probabilidades y usar la media pero no fue suficiente para identificar y modelar experimentos binomiales. Debemos poner énfasis y reforzar, de acuerdo a los estándares de formación de profesores de matemática, la capacidad de conducir con éxito el aprendizaje en la identificación de la variable aleatoria con distribución binomial, el cálculo de la esperanza matemática y analizar situaciones para la enseñanza de esta distribución. Los retos que proyectan las orientaciones curriculares de estadística a profesores que enseñan esta disciplina, y que se podrían abordar para mejorar la acción didáctica, son analizar los significados de la distribución binomial que se pretende enseñar; establecer los diversos niveles de comprensión del tema; estudiar las estrategias de los estudiantes en la resolución de problemas de tipo binomial a objeto de orientar de buena forma las actividades de aprendizaje [3]. Sin lugar a duda estamos frente a un nuevo saber para el profesor de matemática, por un lado en cuanto al diseño e implementación de problemas tipo binomial y la apropiación de los estudiantes. Por otro lado, es un momento en que las Escuelas de Educación deben promover la cultura y razonamiento probabilístico en la formación inicial de profesores .

Trabajo realizado en conjunto con:
Lidia Retamal[46], Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.
Hugo Alvarado [47], Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.

[45] e-mail: `ncid@magister.ucsc.cl`
[46] e-mail: `lretamal@ucsc.cl`
[47] e-mail: `alvaradomartinez@ucsc.cl`

Referencias

[1] ALVARADO, HUGO; RETAMAL, LIDIA, *La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica*, Paradigma, (2010). 89-108.

[2] GARCÍA, J. I., MEDINA, M. and SÁNCHEZ. ERNESTO , *Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación-problema de probabilidad.* Avances de Investigación en Educación Matemática, Vol. **6**. (2014). 5-23.

Estadística temprana: listas, tablas y gráficos estadísticos

Soledad Estrella
Instituto de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

Describimos el análisis sobre las producciones de alumnos de primaria, a quienes se les propuso una situación de análisis de datos. Indagamos en el espacio de trabajo matemático [2, 4] puesto en juego por estos alumnos que produjeron listas, tablas y gráficos al trabajar con los datos. Investigamos las diferentes comprensiones que sostienen los niños de grado 1, 2 y 3 (aproximadamente de 6 a 8 años de edad) acerca de las representaciones de datos. Como lo proponen diferentes reportes, existe la necesidad de desarrollar el pensamiento estadístico tempranamente, de modo que los niños comprendan aspectos fundamentales del análisis de datos [3, 5]. Para ello, hemos enfrentado a los niños a situaciones de análisis de datos, que involucran los datos y sus representaciones. Además, varios estudios han indagado en las dificultades que presentan los sujetos de todas las edades, en cuanto al análisis estadístico y a las representaciones de los datos. Si bien hay estudios sobre la comprensión gráfica, no ha sido suficientemente explorada la amplitud de visualizaciones de datos que producen los niños enfrentados a una situación de análisis de datos [1]. En este escrito se analizan entrevistas clínicas que enmarcan el trabajo y las comprensiones que los niños presentan al analizar datos y construir representaciones. Sostenemos que el análisis de la diversidad de representaciones de los niños nos entrega una visión más completa de su temprana comprensión estadística.
Trabajo realizado en conjunto con:
Patricia Estrella[48], OMEP, Valparaíso, Chile.
Sergio Morales[49], Doctorando en Didáctica de la Matemática, PUCV, Valparaíso, Chile.
Raimundo Olfos, Instituto de Matemáticas, PUCV, Valparaíso, Chile.
Pedro Vidal-Szabó[50], Doctorando en Didáctica de la Matemática, PUCV, Valparaíso, Chile.

Referencias

[1] Estrella, S., Estrella, P., Goldrine, T., Morales, S., Olfos, R., Vidal, P. , *Estadística temprana en los grados K a 4: el caso de Kinder*, En XIX JNEM. Villarrica, (2015).

[2] Estrella, S., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vivier, L., *El trabajo matemático en el Análisis: una aproximación a los ETM en Francia y Chile*, Actes du colloque ETM4, 30 juin-04 juillet. Espagne, (2014).

[3] Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., Scheaffer, R. *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report Alexandria, VA: ASA*, (2007).

[48] Parcialmente financiado por Fondecyt No 11140472, pestrellar@gmail.com
[49] Parcialmente financiado por CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016-21161378, sergio.morales.candia@gmail.com
[50] Parcialmente financiado por CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016-21161569, pedro.vidal_s@umce.cl

[4] Kuzniak, A., Richard, P., Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. **17**4-1, (2014). 5-15 pp.

[5] National Governors Association Center for Best Practices [NGA] y Council of Chief State School Officers [CCSSO], *Common core state standards for mathematics*, DC: Author, Washington, (2010).

Un abordaje sociocultural en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en contexto rural

Miguel Friz Carrillo y Rodrigo Panes Chavarría[51]
Depto. Ciencias de la Educación
Grupo de Investigación en Educación y Educación Matemática
Universidad del Bío-Bío
Chillan, Chile

En la investigación en curso nos situamos desde una perspectiva sociocultural de la matemática para analizar las elecciones llevadas a cabo por un grupo de profesores de matemática cuando se enfrentan al desarrollo de su práctica docente. Identificamos los conocimientos matemáticos culturales sobre los cuales presta atención para su planificación didáctica y las intenciones curriculares para con el desarrollo de pensamiento crítico desde la disciplina. Las experiencias recogidas nos muestran a profesores que reconfiguran los aprendizajes de su formación inicial docente producto del contexto de desempeño y que promueven prácticas inclusivas y de empoderamiento crítico.

Referencias

[1] D'AMBROSIO, U. (2001). Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Belo Horizonte: Autêntica.

[2] D'AMBROSIO, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J.Giménez, J.Diez-Palomar, y M. Civil (Eds.), Educación Matemática y Exclusión. España: Grao.

[3] SKOVSMOSE, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: Una empresa docente.

[4] SKOVSMOSE, O. y VALERO, P. (2012). Educación matemática crítica: Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. (Ed.) Paola Valero; Ole Skovsmose. Bogotá: Ediciones Uniandes

[5] VALERO, P. ANDRADE-MOLINA, M. y MONTECINO, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(3), 287-300

[51]Parcialmente financiado por PAI 79140019, e-mail: `marcelo.flores@uv.cl`

La función exponencial : entre lo discreto y contínuo

Jaime Mena Lorca[52]
Instituto de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

La funci'on exponencial es un objeto de estudio tanto en Chile como en Francia, en ambos países su enseñanza comienza en el liceo y ha sido fuente de estudio en el marco de un proyecto (ECOS C13H03). Se puede introducir como una expresión que modela problemas poblacionales y problemas de economía, sin embargo, se observa un fenómeno de la dialéctica discreto-continuo, y con este tipo de problemas, por lo general, no se cuestiona (ni justifica) a nivel de enseñanza la continuidad de esta función o la propiedad de funcionalidad a la cual obedece. Esta investigación se inscribe en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak, Richard, 2014). Los programas de estudio estructuran los saberes en el ETM en el cual la conexión no es siempre trabajada, o lo es al menos de manera parcial. La conexión es importante para la constitución de un ETM total en el análisis. Es de nuestro interés, dar condiciones para intervenir en el ETM personal de profesores durante su formación inicial. Para ello, se diseñó una serie de actividades y conformando una ingeniería didáctica (ID), las que serán presentados en esta comunicación con datos de Chile. La propuesta didáctica consta de tres fases en torno a la función exponencial; ellas conectan el ETM de, respectivamente: las funciones, y las series de polinomios con sus propiedades de continuidad, derivabilidad, funcionalidad, así como en sus distintas representaciones, y como modelos matemáticos. El objetivo es desarrollar (o provocar) cuestionamientos centrales del análisis que involucran la aproximación, la convergencia, la completitud, la continuidad, lo discreto, lo continuo. La propuesta fue aplicada en 4 sesiones de clases a 15 estudiantes de tercer año de Pedagogía en Matemática (formación inicial de profesores) en Chile. Cabe destacar, que resultados de dos fases se presentarán en esta comunicación.[3]

Trabajo realizado en conjunto con:
Elizabeth Montoya Delgadillo[53], Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
Laurent Vivier[54], LDAR, Université Paris Diderot, Paris, Francia.

Referencias

[1] Kuzniak, A. ; Richard, P., *Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 17.1. **16**, (2014). 1-16.

[2] Kuzniak, A. *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genéses. Vol. 16.* Vol. **16**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, (2011). 9-24.

[52] Parcialmente financiado por Ecos-Sud C13H03, e-mail: `jaime.mena@pucv.cl`
[53] Parcialmente financiado por Ecos-Sud C13H03, e-mail: `elizabeth.montoya@pucv.cl`
[54] Parcialmente financiado por Ecos-Sud C13H03, e-mail: `laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr`

Enseñanza y aprendizaje de la representación en prescolar: el caso del "juego de los tesoros"

Grace Morales Ibarra[55]
CREAD
Universidad de Bretaña Occidental
Francia.

El presente trabajo de investigación caracteriza la enseñanza-aprendizaje de prácticas de representación gráfica aprendidas por alumnos de 5 años, las cuales se desarrollan en situaciones de juego de la ingeniería didáctica el "juego de los tesoros" (Brousseau, 2004). Brousseau (2004) presenta este juego como una situación fundamental sobre la representación, a través del cual, durante un año, los alumnos construyen por necesidad un lenguaje icónico, un código común, para comunicar a sus pares un conjunto finito de objetos escondidos en una caja y que deben ser nombrados sin error para ganar cada juego. Estos juegos preparatorios permiten desarrollar una comprensión y posterior uso sobre símbolos escritos, capacidad que es necesaria desarrollar para el estudio de las matemáticas y otras disciplinas en la etapa escolar. Las preguntas que orientan la caracterización de prácticas de representación suponen que para comprender cómo una práctica llega a ser lo que es hay que indagar en las circunstancias que le han dado origen ¿En qué circunstancias tal práctica fue aprendida? Pues la forma que ha adquirido dicha práctica, su lógica, responde al contexto y a la comunidad en la que se desarrolla. Este contexto es asociado al hinterground o background (Wittgenstein, 1999), el cual funciona como una escenografía que permite interpretar las prácticas observadas en una situación experimentada por un individuo inserto en una comunidad (¿porqué él hace lo que hace?) Este cuestionamiento es planteado desde la teoría de acción conjunta en didáctica o TACD (Sensevy, 2010). Se utiliza el concepto de background contractual, el cual se le asocia a la evolución del contrato didáctico (concepto reproblematizado y entendido como un sistema de conocimientos que el profesor espera sean utilizados adecuadamente frente a una situación-problema). A través de un estudio de caso documentado en 2011, en una escuela de párvulos francesa, se reconstruirá y analizará el background contractual que permitió la génesis y el desarrollo de prácticas de representación de un código creado para un objeto del juego de los tesoros: "la pila". Se analizarán las estrategias que el profesor despliega a través de los procesos de devolución, micro-institucionalización e institucionalización permitiendo el estudio y relación de alumnos con el medio didáctico, y la mesogénesis de representaciones. La exposición describirá las líneas generales de las cuatro fases del "juego de los tesoros". Luego, se presentarán las preguntas de investigación y elementos teóricos fundadas en una tesis doctoral (Morales, 2014). El estudio de caso de la "pila" se presentará utilizando una metodología reciente en investigación cualitativa que incorpora transcripciones, intrigas didácticas y fotogramas (metodología propia de la TACD). A partir de las conclusiones se invitará a abrir la discusión para cuestionar y explorar los aportes que esta reconceptualización de herramientas teóricas, tales como contrato didáctico, puede otorgar para lograr una comprensión más profunda sobre los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de prácticas de representación a nivel prescolar, y posibles aplicaciones en otros contextos de enseñanza-aprendizaje matemático.

[55]Tesis financiada por Becas Chile, Conicyt

Blogs y columnas de matemáticas: algunas reflexiones

Andrés Navas
USACH
Santiago, Chile

En esta charla propondremos una continuación de la discusión iniciada hace un par de años sobre espacios de divulgación matemática en medios masivos. Se comparará el caso local con otros a nivel internacional.

Matices en la tematización del esquema conceptos básicos del álgebra lineal

Marcela Parraguez[56]
Instituto de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

La presente investigación se centra en el análisis de la construcción mental de los conceptos básicos del álgebra lineal (espacio vectorial [1], combinación lineal [2], base, dimensión, transformación lineal [3] y valores y vectores propios) una vez finalizado un proceso de instrucción a estudiantes universitarios chilenos. Por una parte, consideramos los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE [4] en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración de los conceptos caracterizada por elementos matemáticos, relaciones lógicas y modos de representación que los estudiantes utilizan. Los resultados indican que tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal es difícil de lograr, porque las conexiones que se establecen entre las componentes que están formando el esquema del estudiante no son correctas o adecuadas. Nuestra propuesta es una secuencia didáctica de actividades con base en el ciclo ACE.
Trabajo realizado en conjunto con:
Raúl Jiménez[57], Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

Referencias

[1] Parraguez, Marcela; Oktac Asuman, *Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial*, Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA, **33(1)**, (2012), 163-192.

[2] Parraguez, Marcela; Uzuriaga, Vivian *Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores*, Revista Scientia et Technica Año XIX, **19(3)**,(2014),329-334.

[3] Trigueros, María; Maturana, Isabel; Parraguez, Marcela; Rodriguez, Miguel *Construcciones y mecanismos para el aprendizaje del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal*, Revista Educación Matemática, **27(2)**,(2015),95-124.

[4] Arnon, Ilana; Cottril, Jim; Dubinsky, Ed; Oktac, Asuman; Roa, Solange; Trigueros, María; Weller, Kirk. *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education.* **Springer, New York**,(2014).

[56] Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt Regular 1140801, e-mail: marcela.parraguez@pucv.cl
[57] Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt Regular 1140801, e-mail: rjimen@ucn.cl

XXIX Jornada de Matemática de la Zona Sur
Universidad de Talca
21, 22 y 23 de Abril de 2016, Santa Cruz, VI Región, Chile

Una secuencia didáctica para desarrollar competencias superiores en la modelización con la transformación lineal

Sara Pascual Pizarro[58]
Departamento de Ciencias de la Educación
Universidad del Bio-Bio
Chillán, Chile

Dentro de la actividad matemática conceptos unificadores y generalizadores no sólo enseñan la coherencia interna de las matemáticas, sino también conducen a hacer elecciones para ganar en simplicidad y en fiabilidad, que toman valor de los significados y la pertinencia matemática. La dificultad de los estudiantes de ver un concepto matemático conocido de manera completamente nueva nos llevó a diseñar una secuencia didáctica para desarrollar y proponer una enseñanza del concepto unificador de la transformación lineal. Invitamos a los estudiantes a establecer una relación diferente con este saber y a centrarse en un trabajo de estructuración por la modelización y la interpretación. Nos damos cuenta que la secuencia hizo tender a niveles más abstractos de explicitación con reformulaciones más eficaces de los problemas que tenían que resolver. Relacionamos este estudio con la evolución histórica del concepto a partir de las formas en las cuales se manifestó y su enseñanza directa como estructura única y general. Este estudio procede de una necesidad en el medio universitario en Chile, en el momento de ofrecer el curso de álgebra lineal en la formación de ingeniería. Curso introduce muchos conceptos abstractos y para muchos estudiantes, el trabajo al nivel abstracto es difícil y no ven la utilidad, simplemente se niegan al aprendizaje. Ellos reconocen a las matemáticas en su forma *"pura"* y teórica, porque se trata según ellos, de un paso obligado antes de la aplicación, pero no logran percibir la utilidad de trabajar el sentido de los conceptos. La enseñanza del álgebra lineal queda así reducida al tratamiento puramente matemático y desprendida de la toma en cuenta de elementos externos que pueden dar lugar a una contextualización en diferentes dominios y aplicaciones. Para ayudar a los estudiantes a aprender, movilizar o profundizar conceptos unificadores, hemos diseñado una secuencia didáctica en torno a la transformación lineal (TL) ([5]), que incluye cambios de cuadros en relación con otros enfoques teóricos, permitiendo al estudiante, en el momento del pasaje al nivel simbólico, identificar las semejanzas y las diferencias entre los objetos y métodos ya conocidos. De esta manera la secuencia toma pasos de integración entre el lado aplicado a su dominio práctico profesional y el lado teórico de las matemáticas.

En distintos grados, las cuatro situaciones que hemos logrado ([5]) comprometen al estudiante en una actividad de *modelización matemática*. Cada una de las situaciones problemas salidas de dominios variados (proporcionalidad, rotación, deformación de cuerpos en física, áreas...), esta presentada con la ayuda de un corto párrafo que termina con las preguntas de las tareas. Las formas de utilización permiten desarrollar medios de retroalimentación que los estudiantes pueden recibir, y las formas asociadas de control y autovalidación que se inducen del medio didáctico de esas tareas. De manera que la utilidad percibida de las relaciones del trabajo de la modelización les invita a una validación autónoma permitiendo juzgar el sistema matemático estudiado. En particular, el uso y recurso de la reformulación en algunos estudiantes dicen dar prueba de una mirada crítica sobre la construcción del modelo unificador según los diferentes aspectos desarrollados de una situación de acción.

[58]e-mail: `spascual@ubiobio.cl`

Para promover la unificación, intentamos crear la necesidad del conocimiento en relación con la validez del enunciado de cada problema, de cada una de las actividades diseñadas. Con la intención de reencontrar las propiedades vinculadas a los objetivos representados, el estudiante a quien se va enseñar la noción, hay en él consideraciones matemáticas que van a conformar el nuevo modelo que se aplica, donde el nuevo objeto matemático interviene y funciona ([1]). Lo que conduce a abordar de frente el estudio de los procesos subyacentes que traen la aparición o la evolución de la unificación. Además de hacer un trabajo de explicitación en el aprendizaje de la noción, la secuencia busca, por la representación de las situaciones problemas, estructurar el concepto que debería surgir desde la integración de los resultados obtenidos por los estudiantes. Cada vez, el estudiante descubre las diferentes formas que se corresponden con los procesos ya conocidos, y da cuenta, por la comparación de los diferentes modelos creados por él, de las semejanzas y las diferencias, las contribuciones y los límites que pueden concernir a las componentes de la situación: objetos, relaciones, reglas propiedades del nuevo modelo. De acuerdo al ciclo de la modelización, la TL y su unificación son acondicionadas así de una situación a otra, lo que fomenta la concepción del concepto unificador y generalizador de la noción. Sin lugar a dudas relacionado con la enseñanza de un concepto de un nivel superior, la distribución de la complejidad de las tareas presentadas por la secuencia debió ser de menos a más.

Los problemas accesibles con capacidades gráfica, numérica, geométrica y algebraica en distintos contextos matemáticos, para ”tomar en conjunto” la unificación y generalización de la noción, son los más invocados, por el rol de la preexistencia de los conocimientos de competencias de nivel inferior. La formación del concepto abstracto se hace en correspondencia con cuatro grados de niveles de explicitación en la elaboración de conceptos matemáticos: asociación, comprensión, estructuración y reformulación ([2]). También hubo una buena diferencia entre las situaciones de la necesidad o pertinencia del objeto matemático (la TL) para ejecutar las tareas. Definiendo el modelo por su función, notamos que el rol de las *diferencias* era tan importante como el de las *semejanzas*.

En general, la secuencia utiliza la maestría y eficacia de la transformación lineal como una herramienta de conducción para juzgar, para probar o abordar y para resolver problemas en el dominio de aplicación presentado por el estudio de la TL. Principalmente, no con el propósito de resolver nuevos problemas, sino más bien en la idea de reforzar la cohesión de las matemáticas para dar mayor claridad en su dominio de estudio. Por lo que su atención se centró más en el valor epistémico de su unificación de objetos y métodos que en su función pragmática. ([3], [4]).

Referencias

[1] Brousseau G., *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, textes rassemblés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, (1998).

[2] Caron France *Niveaux d'explicitation en mathématiques chez des étudiants universitaires*, Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXX, no 2, pp. 279-301, (2004).

[3] Dorier J-L, & Sierpinska A. *Research into the teaching and learning of linear algebra.* In Derek Holton (Ed.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publisher. Printed in Netherlands. pp.255-273, (2001).

[4] Dorier J-L *La recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques. Radisma, (2006).

[5] Pascual S. *Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería.* Thèse de Doctorat. Université de Montréal, (2013). http://hdl.handle.net/1866/9726

Estudio exploratorio del mapa emocional de estudiantes de 4° básico en sus clases de matemática

Josefa Perdomo-Díaz[59]
Centro de Modelamiento Matemático y Centro de Investigación Avanzada en Educación
Universidad de Chile
Santiago de Chile, Chile

La influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas es un hecho ampliamente reconocido (por ejemplo, Efklides y Volet, 2005; Pekrun, 2005; Schoenfeld, 1998). Las emociones son consideradas como uno de los principales componentes de este dominio, junto con la motivación, las actitudes y las creencias (Hannula, 2012; McLeod, 1992). En este trabajo mostraremos un estudio exploratorio de las emociones que un grupo de estudiantes reportan cuando realizan actividades de geometría. Los datos corresponden a 38 estudiantes de 4° Básico y 177 actividades sobre longitud, perímetro y área. Se presentará una visión general de las emociones del curso y se mostrarán los resultados de los avances que hemos realizado en la búsqueda de patrones de comportamiento por estudiantes y por actividades.
Trabajo realizado en conjunto con:
Andrés Fernández, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago de Chile, Chile.

Referencias

[1] Efklides, A. & Volet, S. (2005). Feelings and emotions in the learning process: Learning and Instruction, 15(5), 377-380.

[2] Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. Research in Mathematics Education, 2(3), 137-161.

[3] McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 575-596. New York: MacMillan.

[4] Pekrun, R. (2005). Progress and open problems in educational emotion research. Learning and Instruction, 15, 497-506.

[5] Schoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. Issues in Education, 4(1), 1-94.

[59]Parcialmente financiado por PAI 79140019, e-mail: `marcelo.flores@uv.cl`

La reconstrucción de los significados de los objetos matemáticos desde el punto de vista histórico-epistemológico como base para la caracterización y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del profesor

Luis R. Pino-Fan[60]
Departamento de Ciencias Exactas
Universidad de Los Lagos
Santiago, Chile

Entre los modelos surgidos para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas existe un acuerdo generalizado en que uno de los aspectos elementales del conocimiento del profesor es que éste debe conocer las matemáticas que va a enseñar, es decir, "conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. El conocimiento profundo del contenido le permite [al profesor] seleccionar las grandes ideas para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le planteen" [2, pág. 322]. Pero qué significa conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud? Cuando se pretende evaluar, caracterizar o desarrollar el 'conocimiento matemático para la enseñanza' de un profesor, sobre un objeto matemático concreto, surgen interrogantes importantes tales como Qué es o qué significado(s) tiene realmente dicho objeto matemático? El o los significados pretendidos por el currículo, sobre dicho objeto, es representativo del verdadero significado de referencia de dicho objeto?

En esta charla se presenta una de las categorías -con sus respectivas herramientas teórico-metodológicas- del modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático* [1], la cual permite tener una perspectiva de las respuestas a las interrogantes anteriores, evidenciando así por qué el conocimiento del contenido del profesor necesario para la enseñanza debe ser un "conocimiento especializado del contenido".

Referencias

[1] Pino-Fan, Luis; Assis, Adriana; Castro, Walter, Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge, *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, Vol. **11**(6), (2015). 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

[2] Schoenfeld, Alan; Kilpatrick, Jeremy, Towards a theory of profiency in teaching mathematics. In D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers, Rotterdam, (2008).

[60]Parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt de iniciación No 11150014, e-mail: `luis.pino@ulagos.cl`

Algunas proposiciones en la evolución de la geometría clásica no contada: una invitación a trabajar en el aula

Eduardo Orellana[61]
Departamento de Matemática
UCSC
Concepción, Chile

El planteamiento de la geometría clásica [1] en la escuela es una buena propuesta para usarla como gatillante en lograr un razonamiento matemático adecuado en los estudiantes [2]. Pero, en muchas ocasiones nos quedamos en mirarla desde lejos o sólo la tratamos como un mero contenido a incluir en el aula para tratar de huir lo más rápido posible de ella. Por el contrario, podríamos usar como pie de inicio las definiciones y teoremas que nos indican las bases curriculares y así invitar a la reflexión y al razonamiento matemático para posteriormente dar a conocer el como ha evolucionado con nuevas proposiciones esta geometría. Además, nos podemos apoyar por ejemplo, con incluir en nuestras clases la construcción haciendo uso de regla y compás o también softwares de geometría como recursos para considerar los avances y proposiciones de la geometría moderna y la dinámica [3] respectivamente.
De las definiciones, conceptos primitivos u otros como también los teoremas clásicos que nos llevan a nuevas proposiciones podemos tener, entre otros la circunferencia de Apolonio, los elementos de un triángulo y sus propiedades, punto simediano, puntos singulares en la circunferencia, circunferencia inscrita, circuscrita a un polígono regular, antiparalelas entre tantos otros. Se presentan así, algunos teoremas [4] que no son contados en nuestra vida escolar.

Referencias

[1] Ross H. , *Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry*, The Mathematical Association of America, 1995.

[2] Godino, Batanero; Douady *Obstáculos de aprendizaje*, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, (2002)

[3] Johnson , *Moder Geometry*, Houghton Mifflin Co, 1929.

[4] Levy, S. , *Introducción a la geometría moderna*, México, 1983.

[61]e-mail: eorellana@ucsc.cl

Transformaciones Isométricas a través del Modelo de Van-Hiele

V. Santelices, C. Casanova y M. Aravena
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Católica del Maule

El estudio aborda un problema vigente en Chile, que dice relación con las dificultades y obstáculos que manifiestan los alumnos en temas geométricos. Para dar respuesta a esta problemática, se diseñó una secuencia didáctica, en el tema de Transformaciones Isométricas, basada en el modelo de Van-Hiele y se implementó en un curso de primer año de secundaria de un establecimiento municipalizado de la comuna de Talca. Las bases teóricas de la propuesta se enmarcan en el modelo de Van-Hiele, cuyas investigaciones muestran que una enseñanza diseñada en niveles de razonamiento permite a los alumnos desarrollar capacidades de visualización, razonamiento y construcción de los objetos geométricos. La metodología utilizada fue de corte cuantitativo, mediante un análisis descriptivo-interpretativo, para lo cual se levantaron categorías de análisis basada en los niveles de razonamiento de acuerdo al modelo de Van- Hiele. Para verificar el progreso del alumnado mediante la secuencia didáctica basada en problemas, se diseñó un pretest, y un postest, en base a los niveles de razonamiento de acuerdo al modelo y se analizó utilizando la prueba T-student para muestra dependientes. Los instrumentos fueron validados mediante el alfa de Cronbach, siendo superiores a 0,75. La selección de la muestra fue de manera intencionada, en el contexto de las pre-prácticas, quedando constituida en 18 estudiantes de primer año medio. A nivel de resultados se pudo constatar que los alumnos, en el inicio, presentan enormes debilidades en la descripción de propiedades, en desarrollo de procesos de resolución y en los procesos argumentativos y demostrativos, incluso de manera empírica. Al final de la experiencia las diferencias son altamente significativas a favor del postest, desarrollando capacidades de visualización, reconocimiento de que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas

Referencias

[1] Aravena, M; Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (16) 2, 139-178

[2] Aravena, D. M.; Gutiérrez, A..; Jaime A. (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. Revista Enseñanza de las Ciencias, 34.1 (2016): 107-128

[3] Aravena, M.; Caamaño, C.; González, J.; Cabezas, C.; Córdova, F. (2011). Resolución de problemas en contextos de aplicación. Propuesta Metodológica en la Formación Inicial de Profesores de Matemática. Talca: Tabor.

[4] Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(2/3), pp. 27-46. Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). El grupo de las isometrías del plano. Madrid: Síntesis.

[5] Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Análisis de Obstáculos didácticos observados en el cálculo de perímetro con Tangrama Chino

Yohana Swears Pozo[62]
Facultad Educación
Universidad Católica de Temuco
Temuco,Chile

Se realiza un análisis sobre algunos obstáculos observados en el cálculo del perímetro de figuras construidas con el Tangrama Chino, específicamente, por la singular descomposición del cuadrado y la necesaria estimación a realizar .Por otra parte , la estimación necesita ser presentada en situaciones concretas dentro de los procesos de ensenãnza y aprendizaje en las clases de matemáticas. A partir de esto, se desarrolla una investigación cualitativa en profesores noveles y en ejercicio, para caracterizar el conocimiento que poseen sobre el uso de prácticas que sitúen a la estimación como un elemento de aprendizaje en sus clases. Los resultados muestran el rechazo y el desconocimiento de los profesores a incluir la estimación en sus prácticas, concluyendo el desconocimiento o lejanía de elementos del cálculo Numérico en la formación inicial y la nula relevancia que tiene este tópico para profesores en ejercicio o próximos a ejercer .

Referencias

[1] Artigue, Michele; Douady, Regine; Moreno, Luis *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo editorial Ibeorámericana, S. A. de C. V. (1995). 33 pp.

[2] Brouseau,G *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas* (libros el Zorzal) . Buenos Aires, (2007).

[3] D Amore,B *Relaciones entre área y perímetro:convicciones de maestros y de estudiantes.* (Revista de Educación Matemática). Buenos Aires , (2007).

[4] Swears,Y *Micro - Ingeniería Didáctica en el calculo de area y perimetro* (Tesis de grado) . Santiago,Chile (2014).

[62] e-mail: yswears@uct.cl

Estructuras Algebraicas y Léxico Disponible en Profesores y Alumnos de Pedagogía en Matemática: el caso de dos Universidades de la 8va región de Chile

María del Valle y Pedro Salcedo
Departamento de Currículum e Instrucción
Universidad de Conepción
Concepión, Chile

Estructuras Algebraicas es una asignatura en el Plan de Estudios que alumnos de Pedagogía en Matemática cursan, en algunos casos, en segundo semestre de la carrera y en otros casos en tercer semestre, dependiendo de la Universidad en que estudian. Para ellos es una asignatura difícil y el nivel de reprobación es altísimo. Esto llama la atención y se decide indagar por qué sucede esto y si la variable léxico está produciendo una ruptura conceptual que no permite avanzar, con fluidez, en el conocimiento matemático [1]. El análisis de los datos sobre el léxico que adquieren y que usan posteriormente indica que las palabras más recordadas que adquieren y que están presentes cuando terminan el curso son grupo, anillo y cuerpo y también señalan que a medida que van avanzando acercándose a finalizar sus estudios, ese léxico se enriquece y aumenta considerablemente en relación al adquirido [2].

Trabajo realizado en conjunto con:
[63]Financiado por Conicyt - Fondecyt 1140457, e-mail: `psalcedo@udec.cl`, Departamento de Metodología de la Investigación, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

Referencias

[1] Lee, Claire (2006) *El lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid, Morata

[2] Ferreira A., Salcedo O.,del Valle M. (2014), *Estudio de la Disponibilidad Léxica en el ámbito de las Matemáticas* , Estudio Filológicos 54:69-84.

63

XXIX Jornada de Matemática de la Zona Sur
Universidad de Talca
21, 22 y 23 de Abril de 2016, Santa Cruz, VI Región, Chile

Primeros elementos lingüísticos en la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria

Claudia Vasquez
Pontificia Universidad Católica de Chile

En las últimas décadas se observa una tendencia por incorporar la probabilidad en los currículos de Educación Primaria, con el objeto de promover que los alumnos aprendan conocimientos probabilísticos que les sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. Dado que la probabilidad "proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales" (Godino, Batanero y Cañizares, 1997, p.12). Por tanto, surge la necesidad de educar a los estudiantes en esta área desde temprana edad, para así, contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente "capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones" (Gal, 2005, p.40). Este trabajo presenta un estudio que contempla el análisis del proceso de enseñanza de la probabilidad y, en concreto, cómo el profesor utiliza una multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) cuando enseña probabilidad a estudiantes de educación primaria que no han recibido instrucción previa sobre el tema con el propósito de que éstos aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado.

Referencias

[1] Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

[2] Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1997). Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.