Examen de Análisis de Admisión a la Carrera de Magister en Matemática

Elija tres de los siguientes problemas.

1.- Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una aplicación tal que F^N es una contracción (con constante de contracción $k < 1$) para algún $N > 1$. Demuestre que F tiene un único punto fijo x_0 y que además

$$F^n(z) \to x_0 \qquad \text{para todo } z \in X.$$

Indicación: de por conocido el Teorema del Punto Fijo de Banach para contracciones.

2.-Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ que convergen uniformemente a la función f. Demuestre que f también es continua.

3.- Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff y sea A un subconjunto compacto de X. Demuestre que A es cerrado en X.

4.- Usando multiplicadores de Lagrange demuestre que

$$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n).$$

en donde las constantes $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ son cantidades reales positivas.

Solución.

1.- Como F^N es una contracción en el espacio métrico completo X, entonces por el Teorema de Punto Fijo de Banach, F^N tiene un único punto fijo $x_0 \in X$, es decir $F^N(x_0) = x_0$ y se cumple que para todo $z \in X$

$$\lim_{k\to\infty} F^{kN}(z) = x_0.$$

Reemplazando z por $F(z)$ se obtiene (por la unicidad del punto fijo) que

$$\lim_{k\to\infty} F^{kN+1}(z) = x_0$$

Reemplazamos ahora z por $F^2(z)$ y obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} F^{kN+2}(z) = x_0$$

Asi continuamos hasta que finalmente reemplazamos z por $F^{N-1}(z)$ lo que nos da que:

$$\lim_{k\to\infty} F^{kN+N-1}(z) = x_0$$

Si consideramos todas estas sucesiones se obtiene la sucesión $(F^n(z))_{n=1}^{\infty}$ y como todas convergen a x_0 se concluye que la serie $(F^n(z))_{n=1}^{\infty}$ también converge al punto fijo x_0. Finalmente como todo punto fijo de F es un punto fijo de F^N y como esta última función tiene un único punto fijo, se concluye que el punto fijo x_0 de F es único.

2.- Como la convergencia de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función f es uniforme, entonces dado $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que para todo natural $n \geq N$ y para todo $x \in X$ se cumple que:

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3$$

En particular tomando $n = N$ se cumple que

$$\forall x \in X \quad \Longrightarrow \quad d(f_N(x), f(x)) < \epsilon/3. \tag{1}$$

Ahora demostraremos que f es continua en x_0, en donde x_0 es un punto arbitrario de X. En efecto, como la función f_N es continua en x_0, entonces existe una vecindad U de x_0 tal que

$$\forall x \in U \quad \Longrightarrow \quad d(f_N(x), f_N(x_0)) < \epsilon/3. \tag{2}$$

Por lo tanto, para todo $x \in U$ se cumple:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \quad + \quad \frac{\epsilon}{2} + \quad \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

El primer y tercer $\epsilon/3$ se debe a la implicación (1) y el segundo $\epsilon/3$ se debe a la implicación (2). Esto demuestra que f es una función continua en X.

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff y sea A un subconjunto compacto de X. Demuestre que A es cerrado en X.

Basta demostrar que el complemento de A es un conjunto abierto. Para esto tomemos un punto a en el complemento de A. Demostraremos que existe una vecindad de a totalmente contenida en dicho complemento. Sea $b \in A$, como $a \neq b$ y el espacio es de Hausdorff, entonces existen vecindades disjuntas U y V conteniendo respectivamente a los puntos a y b. Volvemos a realizar la misma operación considerando otro punto $b \in A$, obteniendo así otro par de vecindades disjuntas conteniendo respectivamente a los puntos a y b. Si hacemos esto para todos los puntos $b \in A$, las correspondientes vecindades V serán un cubriemiento abierto de A. Como A es compacto existirá un subcubrimiento finito de A. Digamos que este cubrimiento es:

$$A \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$$

Ahora si llamamos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ a las correspondientes vecindades del punto a que estaban asociadas con las vecindades $V_1, V_2, \ldots, V_n$, se tendrá que la vecindad

$$U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

es una vecindad de a completamente contenida en el complemento de A.

4.-Usando multiplicadores de Lagrange demuestre que

$$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n).$$

en donde las constantes $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ son cantidades reales positivas.

Consideremos el problema de hallar el valor máximo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2$ sobre la esfera n-dimensional de radio $r > 0$, cuya ecuación es:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2.$$

Como la esfera es una superficie compacta en $\mathbb{R}^n$ y la función f es continua, entonces dicho máximo existe. Para hallarlo usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \\ r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 (2x_1) &= 2\lambda x_1 \\ x_1^2 x_4^2 \cdots x_n^2 (2x_2) &= 2\lambda x_2 \\ &\vdots \\ x_1^2 x_2^2 \cdots x_{n-1}^2 (2x_n) &= 2\lambda x_n \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= r^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por x_1, la segunda por x_2, y así sucesivamente, obtenemos, después de las obvias simplificaciones, el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 &= \lambda x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 &= \lambda x_2^2 \\ &\vdots \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 &= \lambda x_n^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Sumando las primeras n ecuaciones y haciendo uso de la última, obtenemos:

$$n x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 = \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = \lambda r^2.$$

Por lo tanto:

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 = \frac{\lambda r^2}{n}.$$

Reemplazando el lado izquierdo de esta expresión en cada una de las primeras n ecuaciones del sistema, se obtiene, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_k^2 = \frac{r^2}{n}.$$

Note que para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ se debe cumplir que $x_k \neq 0$, puesto que de otra manera el sistema 1 no tendría sentido puesto que $\lambda \neq 0$.

Por lo tanto todos los puntos de la forma:

$$P = \left(\pm \frac{r}{\sqrt{n}}, \pm \frac{r}{\sqrt{n}}, \cdots, \pm \frac{r}{\sqrt{n}} \right)$$

son puntos críticos de la función f. Finalmente un simple análisis usando la compacidad de la esfera unitaria (hueca) y la continuidad de la función f, nos permite asegurar que el valor máximo que asume la función en esta esfera es:

$$f(P) = \left(\frac{r^2}{n} \right)^n.$$

Considerando que el valor $f(P) = (r^2/n)^n$ encontrado en el Ejemplo anterior es el máximo de la función f sobre la esfera $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$, podemos escribir que:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \left(\frac{r^2}{n} \right)^n.$$

Como $r > 0$ es arbitrario, podemos escribir entonces que:

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \right)^n$$

tomando $x_j^2 = a_j > 0$. Obtenemos la clásica desigualdad:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

que establece que el promedio geométrico de n cantidades positivas es menor o igual a su promedio aritmético.