PAUTA PRUEBA ADMISÓN MAGÍSTER 2015

1. Sea M y N subgrupos normales de un grupo G tal que $G = MN$. Pruebe que:
$$G/(M \cap N) \simeq (G/M) \times (G/N)$$

   Definamos $\Phi : G \longrightarrow (G/M) \times (G/N)$ por $\Phi(g) = (gM, gN)$ el cual es un homomorfismo con
$$\begin{aligned} \ker \Phi &= \{g \in G \mid (gM, gN) = (m, n)\} \\ &= \{g \in G \mid g \in M \text{ y } g \in N\} \\ &= M \cap N \end{aligned}$$

   cuya $\operatorname{Im} \Phi = \{(gM, gN) \mid g \in G\} \subset (G/M) \times (G/N)$. Aplicando el Primer Teorema del Homomorfismo tenemos:
$$G/(M \cap N) \simeq \operatorname{Im} \Phi$$

   Ahora, dado un par ordenado (g_1M, g_2N) cualquiera de $(G/M)\times(G/N)$ entonces $g_1 = n_1m_1$ y $g_2 = m_2n_2$, ya que $G = NM = MN$.

   Definamos
$$g = n_1m_2 = m_2(m_2^{-1}n_1m_2)$$

   y así tenemos que
$$\Phi(g) = (g_1M, g_2N)$$

   con lo cual obtenemos que $\operatorname{Im} \Phi = (G/M) \times (G/N)$.

2. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbf{R}$.

   (a) Si $z = a+bi$, con $b \neq 0$ es una raíz de $f(x)$, entonces $x^2-2ax+a^2+b^2$ es un factor de $f(x)$.

   En efecto, si $z = a + bi$, con $b \neq 0$, es una raíz de $f(x)$ entonces $\overline{z}$ es también raíz de $f(x)$ y por lo tanto $(x-z)(x-\overline{z}) = (x-a-bi)(x-a+bi) = x^2-2ax+a^2+b^2$ es un factor de $f(x)$.

   (b) Si $f(x)$ tiene grado impar, entonces $f(x)$ tiene al menos una raíz real.

   Si $f(x)$ tiene grado impar $2n+1$, entonces en el peor de los casos va a ser factorizable en $\mathbf{C}$ como
$$f(x) = (x-z_1)(x-\overline{z_1}) \cdot \cdots \cdot (x-z_n)(x-\overline{z_n})(x-r)$$

   y así tiene que tener una raíz real r.

(c) Si $gr(f(x)) \geq 3$, entonces $f(x)$ es reducible en $\mathbf{R}[x]$.
Si $gr(f(x)) \geq 3$, entonces $f(x)$ es reducible en $\mathbf{C}$ como

$$f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1}) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)(x - \overline{z_n})(x - r),$$

si $f(x)$ es de grado impar, o bien

$$f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1}) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)(x - \overline{z_n}),$$

si es de grado par.
En cualquiera de ambos casos $(x - z_1)(x - \overline{z_1}) = x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2$ el cual es un polinomio en $\mathbf{R}[x]$ y así tenemos que $f(x)$ es reducible en $\mathbf{R}[x]$.

3. Sean A un D.I. y K un cuerpo tal que $K \subseteq A$ con $1_A = 1_K$. Entonces

(a) A es un espacio vectorial sobre K.
En efecto, $(A, +)$ es un grupo abeliano y como $K \subseteq A$ entonces el producto $K \times A \longrightarrow A$ está bien definido y las propiedades se verifican trivialmente ya que $(A, +, \cdot)$ es un anillo donde se cumple la distributividad.

(b) Si A tiene dimensión finita como K-espacio vectorial, entonces A es un cuerpo.
Como $(A, +, \cdot)$ es un Dominio Integro, solo debemos probar que dado a en A con $a \neq 0$, éste tiene inverso multiplicativo.
Si $\dim_K(A) = n$ entonces, dado a en A con $a \neq 0$, se tiene que el conjunto $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ es un conjunto linealemente dependiente y así existen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en K, no todos nulos, tal que

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n = 0$$

Si $\alpha_i \neq 0$ entonces

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_i}1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_i}a + \cdots + a^i + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}a^n = 0$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i}a + \cdots + a^i + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}a^n = \left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_i}\right)1$$

y así

$$a\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}1 + \cdots + a^{i-1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}a^{n-1}\right)\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_i}\right)^{-1} = 1$$

lo cual establece que dado cualquier a en A no nulo se tiene que su inverso multiplicativo es:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}1 + \cdots + a^{i-1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}a^{n-1}\right)\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_i}\right)^{-1}$$

4. Sea K el cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) = x^3 - 5 \in \mathbf{Q}[x]$

   (a) Explicitar el grupo de Galois $G(K/\mathbf{Q})$. ¿Es K una extensión de Galois de $\mathbf{Q}$?
   $G(K/\mathbf{Q}) = \{id, \sigma, \rho, \rho^2, \sigma\rho, \sigma\rho^2\}$ donde $\sigma : \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{3})$ definido por

$$\sigma(\omega) = \overline{\omega} \text{ donde } \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \omega^2 = \overline{\omega},\ \omega^3 = 1$$

   y $\rho : (\sqrt[3]{5}, i\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{3})$ definido por

$$\rho(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5}\omega$$

   El cuerpo K es una extensión de Galois de $\mathbf{Q}$ ya que K es el cuerpo de descomposición del polinomio $x^3 - 5 \in \mathbf{Q}[x]$.

   (b) Encontrar la correspondencia biyectiva entre los subgrupos de $G(K/\mathbf{Q})$ y los subcuerpos de K
   El orden del grupo de Galois $G(K/\mathbf{Q})$ es $\not 6$ y $G(K/\mathbf{Q})$ es isomorfo a D_3.

$$\begin{tikzcd}
 & \{1\} \arrow[d] & \\
 & N = \{1, \rho, \rho^2\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H_1 = \{1, \sigma\} \arrow[dr] & H_2 = \{1, \sigma\rho\} \arrow[d] & H_3 = \{1, \sigma\rho^2\} \arrow[dl] \\
 & G(K/\mathbf{Q}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
 & \mathbf{Q}(i\sqrt{3}) \arrow[u] & \\
\mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}) \arrow[ur] & \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}\omega) & H_3 = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}\omega^2) \arrow[ul] \\
 & \mathbf{Q} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

   (c) Determinar, si existen, subcuerpos L de K de modo que L sea una extensión de Galois de $\mathbf{Q}$
   $\mathbf{Q}(i\sqrt{3})$ es una extensión de Galois de $\mathbf{Q}$ porque $N = \{1, \rho, \rho^2\}$ es un subgrupo normal de $G(K/\mathbf{Q})$ y $\mathbf{Q}(i\sqrt{3})$ es el cuerpo dejado fijo por el subgrupo N.

   (d) Expresar el grupo $G(L/\mathbf{Q})$ como un cuociente del grupo $G(K/\mathbf{Q})$ para los cuerpos intermedios encontrados en (c)
   Aplicando el Teorema de Galois tenemos que

$$G(L/\mathbf{Q}) \simeq G(K/\mathbf{Q}) \diagup N$$