EXAMEN DE ADMISIÓN, ÁLGEBRA

Instrucciones: escoger 3 de los 4 problemas siguientes y resolverlos

(1) Sea $n \geq 1$ un entero y $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ j \in \{1,2,\ldots,n\}}}$ una matriz en $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Definimos la matriz B por $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ j \in \{1,2,\ldots,n\}}}$.

Se supone que el determinante de A vale 3. ¿ Cuánto vale el determinante de B ?

(2) Consideramos el grupo $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dotado de la suma usual.
   (a) Encontrar todos los elementos de orden 1,2,3 y 6 de G.
   (b) Encontrar todos los homomorfismos de grupo de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to G$. ¿ Cuáles son inyectivos ?

(3) (a) Demuestre que el polinomio $x^6 + x^3 + 1$ es irreductible en $\mathbb{Q}[x]$
   (b) Denotamos por $\mathbb{F}_7$ al cuerpo finito de 7 elementos. Demuestre que el polinomio $x^4 - 5x^2 + 1$ es reductible en $\mathbb{F}_7[x]$.

(4) Sea p un número primo. Considere el anillo $\mathbb{Z}[x]$ y los ideales $I = (p)$ y $J = (p, x)$. Denotamos por $\mathbb{F}_p$ al cuerpo finito de p elementos
   (a) Demuestre que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{F}_p[x]$. Deduzca que I es un ideal primo
   (b) Demuestre que J no es un ideal principal
   (c) Muestre que $J = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : p \text{ divide a } f(0)\}$
   (d) Demuestre que J es un ideal maximal.

Instituto de Matemáticas, PUCV, Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile