Examen Admisión Magíster en Matemática PUCV 2014

Análisis : Pautas

$\boxed{1.}$ Demostrar mediante un ejemplo que el espacio $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, donde $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$, no es un espacio de Banach.

Pauta :
— Base – 1pt
— Conocer la definición de espacio de Banach y la definición de sucesión de Cauchy – 1 pt
— Tomar una sucesión que es de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ – 3 pt
— Ver que la misma sucesión no es convergente en $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ – 2 pt

$\boxed{2.}$ Si $l_1 = \{(x_k)_{k\geqslant 1} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty\}$. Demostrar que en el espacio vectorial normado $(l_1, \|\cdot\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\cdot|)$ la bola cerrada centrada en 0 y de radio 1 $\overline{B(0,1)}$ no es compacta.

Pauta :
— Base – 1 pt
— Conocer la definición de conjunto compacto – 1 pt
— Demostrar que la bola unitaria no es compacta (encontrar una sucesión que no tiene una subsucesión convergente, por ejemplo la base natural, o aplicar la Teorema de Riesz u otra demostración) – 5 pt

$\boxed{3.}$ Sea (X,d) un espacio métrico compacto, y $f : X \to X$ una función tal que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Pruebe que f tiene un único punto fijo (x punto fijo para f si f(x) $= x$).

Pauta :
— Base – 1 pt
— Conocer la definición de espacio métrico compacto – 1 pt
— Encontrar un punto fijo (por ejemplo tomar z como el límite de una subsucesión de $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$; si suponemos que $f(z) \neq z$, se llega a una contradicción con la hipótesis de contracción, la continuidad de f y la convergencia de la subsucesión) – 4 pt
— El punto fijo es único pues si suponemos lo contrario se llega a una contradicción con la hipótesis de contracción – 1 pt