

# Examen Admisión Magíster en Matemática PUCV 2014

## Álgebra : Pautas

El examen tiene 1 punto base.

Cada pregunta tiene asignado un máximo de 2 puntos.

La itemización de puntaje en cada pregunta está indicada según los elementos a evaluar considerados.

1. 1) Sea  $G$  un grupo, y sea  $N$  un subgrupo normal de  $G$ . Sea  $D$  el subgrupo generado por todos los elementos de la forma  $aba^{-1}b^{-1}$  con  $a, b \in G$ , ( $D$  es el subgrupo derivado de  $G$ ). Demostrar que  $G/N$  es un grupo abeliano sí y sólo sí  $D \subset N$ .

2) Sea  $K$  un cuerpo (conmutativo), y sea  $n$  un entero positivo. Defina los grupos  $GL_n(K)$  y  $SL_n(K)$ , y demuestre que  $GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^\times$ .

Pauta :

- Concepto de subgrupo normal y de grupo cociente 1 punto
- Nociones (básicas) de grupos clásicos y aplicaciones del teorema del isomorfismo 1 punto

2. Sea  $A$  un anillo conmutativo con identidad con un único ideal maximal  $\mathcal{M}$  ( estos anillos se llaman anillos locales). Demostrar que para todo  $m$  en  $\mathcal{M}$  se tiene que  $1 + m$  es invertible (o sea es una unidad de  $A$ ).

Pauta :

- Concepto de ideal y su relación con las unidades 1 punto
- Concepto de ideal maximal de un anillo y existencia de ellos 1 punto

3. Sea  $h(x) = x^2 + 2x + 3$ . Descomponer  $h(x)$  en factores irreducibles, respectivamente, sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{11}$  ( $\mathbb{F}_p$  denota el cuerpo de  $p$  elementos).

Pauta :

- Irreducibilidad en anillos de polinomios. Factorización 1 punto
- Concepto y manejo elemental de cuerpos (finitos e infinitos) 1 punto