Examen de Análisis

Instrucciones. Escoger 3 de los 4 siguientes problemas y resolverlos.

1. Sea E el conjunto de todas las $x \in [0,1]$ cuya expansión decimal contiene solamente 4 y 7.

(a) ¿ Es E numerable ?

(b) ¿ Es E denso ?

(c) ¿ Es E compacto ?

2. Sea (X, d) un espacio métrico, completo bajo la distancia $d(x, y)$.

(a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n},$$

demuestre que $\{x_n\}$ es convergente.

(b) Sea $f : X \to X$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Demostrar que para cualquier $x \in X$, la suceción

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

converge a una $y \in X$, independientemente de x y satisface $y = f(y)$.

3. Sean $c_0, \ldots, c_n$ constantes reales tales que

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Demostrar que la ecuación

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n = 0$$

tiene al menos una raíz real entre 0 y 1.

4. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función contínua.

(a) Supongamos que $f \geq 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$.

(b) Supongamos que $\int_0^1 f(x) x^n\,dx = 0$ para toda $n = 0, 1, \ldots$. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$.